Проблема четырёх красок.

Ничего, что мы чужие, вы рисуйте,
Я потом, что непонятно, объясню.
Булат Окуджава

Страны на географических картах раскрашивают в разные цвета. Раскраска считается правильной, если страны, имеющие общую протяжённую границу (одна точка не считается), раскрашены по-разному. Вопрос о количестве цветов, которые нужны для раскрашивания любой карты, поставил английский школьный учитель Гутри в 50-е годы XIX века. Задачей увлеклись студенты, ею заинтересовались математики. Многочисленные эксперименты показывали, что четырёх цветов всегда хватает. Годом рождения "гипотезы о четырёх красках" считается 1878, когда английский математик Кэли (на заседании Королевского Географического(!) общества) высказал предположение, что ***любую карту на плоскости или на сфере можно правильно раскрасить не более чем в 4 цвета.***

1) Какое минимальное количество цветов нужно, чтобы окрасить грани куба?

2) Сколько цветов Вам потребуется, чтобы раскрасить карту острова на рисунке 1? Океан вокруг тоже надо покрасить.

3) При решении предыдущей задачи Вам понадобилось 4 цвета, потому что на ней есть 4 страны, каждая из которых граничит со всеми остальными. Нарисуйте карту острова, где тоже необходимы для раскрашивания 4 цвета, но такой четвёрки попарно граничащих стран нет.

4) Несколько прямых разделили плоскость на части. Какое минимальное количество цветов нужно для раскрашивания такой карты?

В 1890 году англичанин Хивуд доказал, что ***для раскрашивания любой карты достаточно пяти красок.*** *Но гипотеза Кэли, несмотря на свою простоту, никак не поддавалась.*

5) Границы стран можно рассматривать как граф (вершины — стыки границ, рёбра — участки границ). Докажите, что если карту можно раскрасить в два цвета, то все её вершины имеют чётные степени.

6) (Продолжение задачи 5.) Верно ли обратное?

7) Сколько цветов нужно для раскрашивания карты на рисунке 2?

В 1968 году голландец Оре доказал, что ***любую карту, в которой не более сорока стран, можно раскрасить не более чем четырьмя красками.***

8) На рисунке 3 шестиугольный остров разбит на треугольные страны, страны окрашены в два цвета. Можно ли десятиугольный остров разбить подобным образом на треугольные страны и окрасить карту в два цвета (не забывайте красить "океан")?

9) Земля имеет форму шара, а вот планета Тор имеет форму баранки. Обязательно ли для раскрашивания политической карты планеты Тор хватит четырёх красок?

В 1979 году американцы Аппель и Хакен поставили точку в проблеме четырёх красок. Они классифицировали все карты на несколько (около двух тысяч(!)) типов и проверили каждый тип на компьютере. Для всех типов компьютер выдал раскраску в 4 цвета. Эта работа считается первым в истории математики доказательством теоремы с помощью компьютера. Математики потом долго спорили, можно ли это считать строгим доказательством. В настоящее время споры поутихли.

Домашнее задание.

20.1) Есть ли на политической карте мира точки, лежащие на границе четырёх стран?

20.2) Какое минимальное количество цветов потребуется, чтобы правильно раскрасить политическую карту Южной Америки?

20.3) Несколько окружностей разбивают плоскость на части. Докажите, что такую карту можно раскрасить в два цвета.

Специальная задача №18.

Докажите, что всякую карту на плоскости можно раскрасить в 5 цветов.
