Выборы.

Каждый выбирает для себя
Женщину, религию, дорогу,
Дьяволу служить или пророку, —
Каждый выбирает для себя.
Юрий Левитанский

На схематичном примере посмотрим, как устроены некоторые простые избирательные системы. Предположим, что на должность Генерального Секретаря Союза Стабильности претендуют 4 кандидата: Андрей, Владимир, Геннадий и Дмитрий. В голосовании участвует 27 избирателей — членов Секретариата Союза Стабильности. Каждый составляет список своих предпочтений, расставляя по местам четверых кандидатов. В результате получилась такая таблица предпочтений:

	Избиратели			
Место	12	7	5	3
1	Д	Г	В	А
2	Г	В	А	В
3	В	А	Д	Г
4	А	Д	Г	Д

1) Наиболее примитивной является система **относительного большинства**, когда от каждого избирателя учитывается только голос за того, кого он поставил на первое место; набравший большинство голосов считается победителем. Иногда устанавливается **квота** — процент голосов, который должен превзойти победитель, иначе два лучших выходят во второй тур. Кто победит по этой системе в нашем примере? Какова минимальная квота (целое число процентов) для назначения второго тура? Кто выйдет во второй тур?

2) Французский офицер и учёный Бордá (Jean Charles de Borda, 1733 – 1799) предложил **правило Борда** — избирательную систему, при которой от каждого бюллетеня кандидатам начисляются очки (последнему 0, предпоследнему 1 и так далее), а потом очки суммируются. Каковы будут итоги выборов по правилу Борда? Устойчиво ли правило Борда к шкале очков: что будет, если аутсайдеру давать не 0, а, например, 1 очко, следующему – 2 и так далее?

3) **Последовательное попарное голосование** — избирательная система, при которой устанавливается некий порядок кандидатов (**список голосования**), после чего два первых кандидата сравниваются, проигравший выбывает, с победителем сравнивается третий и так далее. Кто победит при установленном списке Д,Г,В,А? Зависит ли результат от списка? Может быть, у Вас есть мнение, как составлять список, чтобы это выглядело наиболее разумным?

4) Английский адвокат Томас Хар (Thomas Hare, 1806 – 1891) предложил систему голосования, получившую название **система единственного передаваемого голоса**. Здесь сначала исключается кандидат, которого наименьшее число избирателей ставят на первое место, а оставшиеся продвигаются в списках вверх. Снова исключается наиболее слабый кандидат и так далее. Кто станет Генеральным Секретарём по системе Хара?

5) Оказывается, система Хара имеет большой недостаток: если какие-то избиратели изменят порядок предпочтения в пользу победителя (то есть поставят его на более высокое место в рейтинге), то он может "вылететь" (хотя , казалось бы, его позиции стали только прочнее). Покажите это на примере.

Теперь несколько разных задач о выборах.

6) Социологи провели опрос: "Будет ли новый президент лучше прежнего?" Из опрошенных $a\%$ сочли, что будет лучше, $b\%$ — что будет такой же, и $c\%$ — что будет хуже. В таких опросах обычно вычисляют два "показателя оптимизма": $M = a+\frac{b}{2}$ (смысл этого показателя в том, что люди, давшие нейтральный прогноз, учитываются как "полголоса за") и $N = a - c$ (смысл этого показателя — превосходство оптимистов над пессимистами). Оказалось, что $M = 40\%$. Найдите N.

7) В телепередаче "Навстречу выборам" 4 кандидата в президенты рассказывали о себе. Через некоторое время один сказал: "До меня соврали один раз". Другой сказал: "А теперь — дважды". "А теперь — трижды" — сказал третий, а четвёртый сказал: "А теперь соврали 4 раза". Тут ведущий прервал дискуссию. Известно, что один из кандидатов правильно сказал, сколько раз соврали до него. Определите, сколько раз всего соврали кандидаты за время телепередачи?

8) В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов. После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов "против всех" и т.п. не было). При этом партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее количество мест в парламенте она может получить?

9) В Северной Балбесии прошли выборы президента, в которых участвовали все жители. Победитель получил более половины голосов, при этом за него голосовали 99% малограмотного населения и 1% грамотного. Докажите, что если бы 35% грамотного населения вообще не пошли бы на выборы, то президент получил бы более чем 60% голосов (от числа пришедших на выборы).

Домашнее задание.

19.1) В Южной Балбесии проходят выборы президента. Выборы считаются состоявшимися, если проголосовало более 60% избирателей. В день голосования, в 18 часов, власти, опасаясь недостаточной явки, развернули в СМИ мощную агитационную кампанию "Как, ты ещё не проголосовал? Ну-ка бегом на участок!" и добились, что к 22 часам (к закрытию участков) проголосовало 20% тех, кто не проголосовал к 18 часам. После закрытия участков выяснилось, что так и не проголосовали 32% избирателей. Стоило ли властям нагнетать истерию, или уже в 18 часов требуемая явка и так была достигнута?

19.2) Каждый из голосующих на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии 10 кандидатов. На избирательном участке находится 11 урн. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит хотя бы один бюллетень и при всяком выборе 11 бюллетеней по одному из каждой урны найдется кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

19.3) Французский математик и политический деятель времён Великой Французской революции, Жан Кондорсе (Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, Marquis de Condorcet, 1743-1794) занимался и теорией голосований. Кандидат, который "в личных встречах" побеждает всех своих соперников называется **победителем по Кондорсе**, а тот, кто каждому уступает — **проигравшим по Кондорсе**. Избирательная система **удовлетворяет условиям Кондорсе**, если победитель по Кондорсе (если таковой есть) в ней обязательно побеждает, а проигравший по Кондорсе (опять же, если такой имеется) — непременно проигрывает. Удовлетворяют ли избирательные системы, описанные в задачах 1 – 4, условиям Кондорсе?

Специальная задача №17.

В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 миллионов избирателей, из которых только один процент поддерживает Мирафлореса (регулярная армия Анчурии). Мирафлорес, естественно, хочет быть избранным, но, с другой стороны, он хочет, чтобы выборы были "демократическими" . "Демократическим голосованием" Мирафлорес называет вот что: все избиратели разбиваются на равные группы; каждая из этих групп вновь разбивается на некоторое количество равных групп, причём большие группы могут разбиваться на разное количество меньших групп, затем эти группы снова разбиваются и т.д. В самых мелких группах выбирают представителя группы — выборщика — для голосования в большей группе: выборщики в этой большей группе выбирают выборщика для голосования в ещё большей группе и т.д. Наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы по своей воле и инструктирует своих сторонников, как им голосовать. Сможет ли он так организовать "демократические" выборы, чтобы его выбрали? (В каждой группе выборщики выбирают своего представителя простым большинством. При равенстве голосов побеждает оппозиция.)
