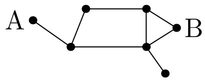
**Гимназия 1543, Вечерняя математическая школа, 7 класс, 7 февраля 2008, занятие 16.**

# Графы – 2. Деревья.

*Ты – дерево, твоя листва в облаках,*
*Но вот лист пролетел мимо лица,*
*Ты – дерево, и мы в надёжных руках.*
*Мы будем ждать, пока не кончится время, и встретимся после конца...*
***Борис Гребенщиков***

*Это занятие снова посвящено графам — фигурам, состоящим из точек (вершин графа), некоторые из которых соединены линиями (рёбрами графа). Если мы прошли по рёбрам графа от одной вершины до другой (не побывав дважды в одной промежуточной вершине и не пройдя дважды ни по какому ребру), то мы прошли (простой)* ***путь****. Если мы вернулись в ту же точку, где стартовали — мы прошли (простой)* ***цикл****. Если есть путь из любой вершины в любую другую, граф называется* ***связным****.*




1) Для графа на рисунке укажите все циклы и все пути AB.

2) В стране 100 городов, некоторые соединены дорогами, причём из каждого города выходит более одной дороги, а два города соединяет не более одной дороги. Всегда ли турист может, выехав

а) из некоторого города, проехать по нескольким городам

б) из некоторого города, проехать по всем городам

в) из столицы, проехать по нескольким городам

и вернуться в город, из которого выезжал, не проезжая дважды по одной и той же дороге?

3) Вам надо соединить пять деревень дорогами, чтобы из каждой можно было проехать в каждую. Каким минимальным числом дорог можно обойтись? Предложите несколько принципиально различных схем мнимального соединения.

*Связный граф без циклов называется* ***деревом****. Потому что похож. Как бы Вы назвали несвязный граф без циклов? Вот-вот, так он и называется :)*

4) Сколько рёбер надо удалить из графа на рисунке, чтобы осталось дерево? Укажите все способы так сделать. Какие из деревьев будут по сути одинаковыми, а какие – принципиально различными?

5) Вершина дерева степени 1 называется **лист**. Докажите, что у дерева всегда есть а) лист; б) два листа.

6) (Формула Эйлера для деревьев) Докажите, что у любого дерева вершин на одну больше, чем рёбер. Докажите, что если у связного графа вершин на одну больше, чем рёбер, то он — дерево.

7) Есть рыболовная верёвочная сетка $15 \times 43$ клеточек. Защитник рыб Вася перерезал сколько смог верёвочек (посередине между соседними узелками) так, что сетка сильно пострадала, но всё-таки не распалась на части. Сколько разрезов сделал Вася?

*То, что получилось с сеткой после Васиных упражнений, называется* ***остовным*** *или* ***каркасным деревом****.*

8) В связном графе выделили каркасное дерево и отметили его лист A. Докажите, что если удалить из графа лист A и все идущие к нему рёбра, то граф останется связным.

9) В стране 15 городов. Некоторые города связаны беспересадочными авиарейсами. Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив не более 26 перелётов.

---

## Домашнее задание на 14 февраля.

16.1) Сколько вершин у дерева с $n$ рёбрами? Сколько у него может быть листьев?

16.2) В Хоббитании 10 городов, каждые две соединены автобусным маршрутом. Какое максимальное количество маршрутов можно отменить, чтобы из любого города в любой всё ещё можно было доехать на автобусах?

16.3) В Изенгарде есть метро, с каждой станции можно доехать до каждой (с пересадками). Докажите, что можно закрыть одну из станций (запретив проезд через неё), чтобы по-прежнему от каждой оставшейся станции можно было добраться до любой другой.

---

## Специальная задача №14.

*В молекуле углеводорода есть атомы углерода и водорода. Атомы углерода соединяются с четырьмя другими атомами, атомы водорода — с одним. Атомы углерода не могут образовывать колец. В молекуле декана 10 атомов углерода. Сколько в ней атомов водорода? Сколькими (геометрически различными) способами они могут образовать молекулу? (Такие молекулы называют изомерами. Их химические свойства похожи, но не одинаковы.)*

---