Гимназия 1543, Вечерняя математическая школа, 7 класс, 24 января 2007, занятие 14.

Принцип Дирихле.

Обычно принцип Дирихле формулируют так: если $nk+1$ кроликов рассаживать по k клеткам, то хотя бы в одной клетке будет более n кроликов. Рассуждают, как правило, в таком стиле: "Пусть нам удалось рассадить кроликов так, чтобы в каждой клетке было не более n кроликов. Тогда, поскольку клеток k, всего будет не более nk кроликов. А у нас их $nk+1$. Противоречие."

1) На складе в воинской части есть 25 пар кирзовых сапог 47-го, 48-го и 49-го размеров. Докажите, что из них можно выбрать не менее девяти пар одного размера.

2) 20 семиклассников решали задачи. Дима решил 18 задач, а остальные меньше. Докажите, что какие-то два школьника решили поровну задач.

3) В ящике лежит 10 красных, 8 синих, 8 зеленых и 4 жёлтых шарика. Какое минимальное количество шариков надо вынуть (с закрытыми глазами), чтобы среди них наверняка нашлись шарики всех цветов?

4) Есть 82 кубика. Докажите, что из них найдется либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных.

5) Придумайте такую же задачу, как предыдущая: "Есть ... кубиков. Докажите, что из них найдется либо 20 кубиков разных цветов, либо 20 одноцветных." Какое минимальное число нужно поставить вместо многоточия, чтобы задача решалась?

6) Старательная Маша вычислила $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, потом $2^{12} = 4096$, $2^{13} = 8192$ и так далее. Ей хотелось найти две такие степени двойки, чтобы у них совпадали три последние цифры. Удастся ли Маше такие степени найти, или она зря тратит время?

7) В каждой клетке квадратной таблицы записано число 1, 0 или -1. В каждой строке, столбце и диагонали считаем сумму всех стоящих там чисел. Могут ли все такие суммы быть различными?

8) Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

9) Верно ли, что среди любых 34-х разных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых вдвое больше другого?

Домашнее задание на 7 февраля.

15.1) В ящике лежит 10 красных, 8 синих, 8 зеленых и 4 жёлтых шарика. Какое минимальное количество шариков надо вынуть (с закрытыми глазами), чтобы среди них наверняка нашлись 6 синих шариков?

15.2) Даны 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Докажите, что среди их попарных разностей найдутся три одинаковых.

15.3) Дано 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Рассматриваются всевозможные их попарные разности (из большего числа вычитают меньшее). Докажите, что среди них всегда найдутся четыре одинаковых.

Специальная задача №13.

Какое минимальное количество различных натуральных чисел, не превосходящих 2008, нужно взять, чтобы из них наверняка можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое?
