Делимость и остатки.

Остается сидеть, на секунды дробя
Все остатки от вечности краткой,
Ощущая, как делится жизнь на тебя
Без остатка, увы, без остатка.
Леонид Цветков

Напомним, что всякое целое число m можно однозначно поделить на всякое натуральное n с остатком, то есть найти неполное частное k и остаток r так, что $m = nk + r$. При этом предполагается, что $0 \leqslant r < n$. Два числа при делении на третье дают равные остатки тогда и только тогда, когда их разность нацело делится на это число. Если нас интересует только остаток при делении на некоторое n, то при сложении, вычитании, умножении чисел их можно заменять остатками от деления на n. Среди n подряд идущих чисел по разу встретятся все возможные остатки от деления на n.

1) Делимое и делитель увеличили в сорок три раза. Как изменятся неполное частное и остаток?

2) Если разделить число 100 на 49, то неполное частное и остаток будут одинаковы (проверьте!). На какие ещё числа следует делить 100 для достижения такого эффекта?

3) Признак деления на 3 и 9. Докажите, что натуральное число даёт такой же остаток от деления на 3 (на 9), как и сумма его цифр.

4) Какие остатки при делении на 9 может давать точный куб? Может ли сумма цифр точного куба равняться 1543?

5) Барон Мюнхгаузен рассказал, что однажды он был свидетелем, как в полночь в Константинополе начался страшный дождь и лил, не переставая, ровно 10000 минут, после чего сразу выглянуло солнце и высушило затопленный город. Могло ли это быть правдой?

6) Генерал построил солдат в колонну по четыре, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по пять. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по шесть Иванов остался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по семь Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Какое наименьшее количество солдат могло быть у генерала?

7) Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2 = z^2$. Докажите, что одно из них нацело делится: а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 5.

8) Некоторые думают, что число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр, стоящих на его нечётных местах равна сумме цифр, стоящих на чётных. Как бы не так. Опровергните это. Придумайте и докажите верную теорему о делимости на 11: "Число даёт такой же остаток от деления на 11, как и ..."

9) Числа p, $p+10$, $p+14$ — простые. Какие именно?

Домашнее задание на 24 января.

13.1) На Поле Чудес растут деревья с золотыми монетами (на разных деревьях может быть разное число монет!). Каждую ночь на каждом дереве вырастает одна монета. 1 марта на деревьях было всего 2007 монет. В марте Буратино посадил еще одно дерево, и 31 марта на деревьях оказалось всего 3000 монет. В какой день Буратино посадил дерево?

13.2) Числа p, $2p+1$, $4p+1$ — простые. Какие именно?

13.3) Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12 без остатка.

Специальная задача №11.

Разбойники украли мешок монет. Номинал каждой монеты — какое-то целое число гульденов. Известно, что если отложить в сторону любую монету, то можно разделить оставшуюся часть добычи между разбойниками так, что каждый получит равное число гульденов. Докажите, что если отложить любую монету, то оставшиеся монеты можно будет раздать разбойникам и так, чтобы каждый получил поровну монет.
