Гимназия 1543, Вечерняя математическая школа, 7 класс, 20 декабря 2007, занятие 10.

Контрольная работа.

1)**Чётность.** Кузнечик прыгает по прямой: первый раз — на 1 см, второй раз — на 2 см и так далее. Может ли он через 25 прыжков вернуться на старое место?

2) **Подсчёт двумя способами.** Две команды разыграли первенство по десятиборью, причем за победу в каждом виде давалось 4 очка, за ничью — по 2 очка, и за проигрыш — 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?

3) **Графы, связность.** Могут ли степени вершин в графе быть равны: 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1 ?

4) **Инвариант.** В углу квадрата 4×4 стоит минус, в остальных — плюсы. Можно заменять все знаки в любом столбце или строке на противоположные. Удастся ли получить таблицу из одних плюсов?

5) **Комбинаторика.** Сколько существует различных игральных костей — кубиков, на гранях которых написаны числа от 1 до 6? Игральные кости считаются различными, если их нельзя перепутать, как ни вращай.

6) **Игры.** У ромашки 43 лепестка. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто победит при правильной игре?

7) **Бонус.** 16 футбольных команд из 16-ти стран провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по одному матчу. Могло ли оказаться, что каждая команда играла во всех странах, но не играла у себя на родине?

Гимназия 1543, Вечерняя математическая школа, 7 класс, 20 декабря 2007, занятие 10.

Контрольная работа.

1)**Чётность.** Кузнечик прыгает по прямой: первый раз — на 1 см, второй раз — на 2 см и так далее. Может ли он через 25 прыжков вернуться на старое место?

2) **Подсчёт двумя способами.** Две команды разыграли первенство по десятиборью, причем за победу в каждом виде давалось 4 очка, за ничью — по 2 очка, и за проигрыш — 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?

3) **Графы, связность.** Могут ли степени вершин в графе быть равны: 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1 ?

4) **Инвариант.** В углу квадрата 4×4 стоит минус, в остальных — плюсы. Можно заменять все знаки в любом столбце или строке на противоположные. Удастся ли получить таблицу из одних плюсов?

5) **Комбинаторика.** Сколько существует различных игральных костей — кубиков, на гранях которых написаны числа от 1 до 6? Игральные кости считаются различными, если их нельзя перепутать, как ни вращай.

6) **Игры.** У ромашки 43 лепестка. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто победит при правильной игре?

7) **Бонус.** 16 футбольных команд из 16-ти стран провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по одному матчу. Могло ли оказаться, что каждая команда играла во всех странах, но не играла у себя на родине?

Краткие решения и ответы.

1) Нет. Чётность расстояния от кузнечика до начальной точки будет меняться с каждым прыжком и в конце будет нечётной, то есть не 0.

2) Если ничьих было x, то всего у обеих команд $4x + 5(10 - x)$ очков, но с другой стороны их 46. Отсюда $x = 4$.

3) Нет: из двух старших вершин рёбра идут во все остальные, то есть степень любой вершины не менее 2.

4) Нет: инвариантом служит нечётность количества минусов в таблице.

5) 30.

6) Второй победит. На отрывание первым лепестков, он оторвёт другое количество с противоположной стороны, разбив массив лепестков на две равные части. Далее будет отвечать симметрично первому.

7) Нет. Пусть такое произошло. Ясно, что каждая команда провела всего 15 матчей, поэтому, если она играла в каждой стране, кроме своей собственной, то в каждой упомянутой стране она провела ровно по одной игре. При этом в каждой стране побывает на матчах ровно 15 команд по одному разу — все участники турнира, кроме команды этой страны. Однако в каждом матче участвует две команды, поэтому общее число команд, игравших в одной стране, должно быть чётным. Противоречие.

Краткие решения и ответы.

1) Нет. Чётность расстояния от кузнечика до начальной точки будет меняться с каждым прыжком и в конце будет нечётной, то есть не 0.

2) Если ничьих было x, то всего у обеих команд $4x + 5(10 - x)$ очков, но с другой стороны их 46. Отсюда $x = 4$.

3) Нет: из двух старших вершин рёбра идут во все остальные, то есть степень любой вершины не менее 2.

4) Нет: инвариантом служит нечётность количества минусов в таблице.

5) 30.

6) Второй победит. На отрывание первым лепестков, он оторвёт другое количество с противоположной стороны, разбив массив лепестков на две равные части. Далее будет отвечать симметрично первому.

7) Нет. Пусть такое произошло. Ясно, что каждая команда провела всего 15 матчей, поэтому, если она играла в каждой стране, кроме своей собственной, то в каждой упомянутой стране она провела ровно по одной игре. При этом в каждой стране побывает на матчах ровно 15 команд по одному разу — все участники турнира, кроме команды этой страны. Однако в каждом матче участвует две команды, поэтому общее число команд, игравших в одной стране, должно быть чётным. Противоречие.
