Инвариант.

Есть, то, что не меняется с годами,
Хотя приходит время перемен.
И если кто-то гонится за днями,
Он не увидит замкнутость систем.
Максим Семёнов

Начнём с задачи, которую мы долго обсуждали на втором занятии: ***Кузнечик прыгает по прямой, каждый прыжок длиной 1 см. Может ли он через 25 прыжков вернуться на старое место?*** *Решение состояло в том, что вернуться в начальную точку можно только после чётного числа прыжков. Изложим решение в несколько другой редакции. Пусть кузнечик сделал один прыжок. Он находится на расстоянии 1 (нечётное число) от точки старта. Теперь делаем заявление: "Отныне после каждых двух прыжков расстояние от кузнечика то точки старта будет нечётным". Если мы наше заявление обоснуем (а это совсем нетрудно), то и после 24-х прыжков расстояние от кузнечика до места старта будет нечётным, то есть ненулевым, что нам и надо. Свойство, которое мы указали для процесса прыжков кузнечика, называется* ***инвариантом*** *(от лат. invariantum – "не меняющийся"). Оно верно после первого прыжка и не меняется после каждой пары прыжков.*

1) Доведите до конца решение задачи про кузнечика: докажите, что найденный нами инвариант — действительно инвариант.

2) В 100-этажном доме лифт имеет кнопки «+6» и «−4» (первая поднимает лифт на 6 этажей, вторая опускает на 4). Можно ли им пользоваться?

3) После уроков один семиклассник взял лист бумаги и порвал его на 4 кусочка. Другой взял один из кусочков и порвал его на 4 кусочка, потом был порван ещё один из кусков, и так они долго рвали бумагу, а потом убежали домой, оставив в классе мусор. Уборщица потом выгребла с пола 2007 кусочков бумаги. Всё ли она нашла?

4) В одной вершине куба написано число 1, в остальных — нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа стали равными?

5) Из числа вычли сумму его цифр, из полученного числа — сумму его цифр и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое?

6) На доске выписаны числа от 1 до 21. Можно брать любые два числа, вычитать из большего меньшее (или из равного равное) и писать разность на доске, а эти два числа стирать. В конце концов останется одно число. Может ли оно быть нулём?

7) На доске написаны числа от 1 до 20. Можно пару чисел (x, y) заменить на $x + y$, пока не останется одно число. Какие числа могут в итоге получиться?

8) Младенец Витя умеет говорить только звуки "А" и "У". Слова, которые он произносит одинаковы по смыслу, если из одного получается другое заменой друг на друга сочетаний звуков "АУ" и "УУУ", "УА" и "ААУ", "УУ" и "ААА". Одинаковы ли по смыслу слова "АУУ" и "УАА"?

9) Круглая тарелка разделена на 6 секторов, в каждом секторе лежит селёдка. За ход можно одну селёдку передвинуть в соседний сектор. Можно ли собрать все селёдки в одном секторе ровно за 20 ходов?

Домашнее задание на 22 ноября.

5.1) В одной вершине куба написано число 1, в остальных — нули. Можно взять вершину куба и прибавить по единице к числам на других концах рёбер, выходящих из неё. Можно ли добиться, чтобы все числа стали равными?

5.2) В углу квадрата 4×4 стоит минус, в остальных — плюсы. Можно заменять все знаки в любом столбце или строке на противоположные. Удастся ли получить таблицу из одних плюсов?

5.3) К числу можно прибавлять сумму его цифр. Можно ли за несколько шагов получить из единицы число 123456?

Специальная задача №5.

На доске написаны числа от 1 до 20. Можно пару чисел (x, y) заменить на $x+y+xy$, пока не останется одно число. Какие числа могут в итоге получиться?
