Чётность и нечётность.

Точит деревья и тихо течет
В синих рябинах вода.
Ветер бросает нечет и чет,
Тихо стоят невода.
Велимир Хлебников

Ответ во многих задачах зависит от чётности входящих в её условие чисел. Количество каких-то элементов чётно, если их можно разбить на пары, иначе нечётно. Часто чётность и нечётность играют роль в ситуациях, где объекты двух разных типов следуют друг за другом, чередуясь.

Про два чётных или два нечётных числа говорят "числа одной чётности". Иначе говорят: "числа разной чётности". Сумма двух чисел одной чётности чётна, разной — нечётна. Произведение нечётных чисел нечётно, в других случаях оно чётно.

1) Кузнечик прыгает по прямой в любую сторону на 1 см. Может ли он за 25 прыжков вернуться в начальную позицию?

2) Четно или нечетно число $1 + 2 + 3 + \ldots + 1543$? А $1 + 2 + 3 + \ldots + 12345$?

3) Может ли вращаться система из 11-ти шестеренок, если 1-ая сцеплена со 2-ой, 2-ая — с 3-ей и так далее, а 11-ая сцеплена с 1-ой?

4) На клетчатой бумаге нарисован многоугольник (по линиям сетки). Докажите, что он имеет четный периметр (сторона клетки имеет длину 1).

5) У каждого марсианина три руки. Могут ли 7 марсиан взяться за руки?

6) На шахматной доске стоят 8 ладей, три на чёрных клетках, 5 на белых. Докажите, что какие-то две бьют друг друга.

7) 239 детей водят хоровод. Докажите, что найдутся два мальчика или две девочки, между которыми стоит ровно двое детей.

8) По кругу написаны в каком-то порядке четыре единицы и пять нулей. За ход между двумя одинаковыми цифрами пишется единица, а между разными — ноль (старые цифры стираются). Могут ли через несколько ходов все числа стать одинаковыми?

9) При каких n можно раскрасить клеточки доски $n \times n$ так, чтобы у каждой чёрной клетки было ровно две соседние белые, а у каждой белой клетки — ровно две соседние чёрные? (Соседние — имеющие общую сторону.)

Домашнее задание на 25 октября.

2.1) Кузнечик прыгает по прямой: первый раз — на 1 см, второй раз — на 2 см и так далее. Может ли он через 25 прыжков вернуться на старое место?

2.2) В выражении $1 * 2 * 3 * \ldots * 9$ звездочки заменяют на минусы и плюсы. Какие числа могут получиться?

2.3) Несколько рыцарей из двух враждующих стран сидят за круглым столом. Известно, что число пар соседей-друзей равно числу пар соседей-врагов. Докажите, что общее число рыцарей делится на 4.

Специальная задача №2.

В классе чётное число человек. Докажите, что какие-то два ученика этого класса имеют чётное число общих друзей.
