

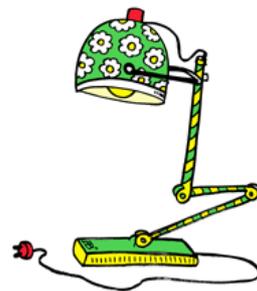
Математический кружок 7 класс

Занятие № 18

Суммы

19.02.2009

- По периметру круглой комнаты висят 17 лампочек. Около каждой лампочки есть выключатель, которые меняет состояние своей лампочки и двух ее соседей. Вначале все лампочки погашены.
 - Докажите, что можно зажечь ровно одну лампочку.
 - Докажите, что можно зажечь лампочки произвольным образом.
- Лампочки расположены в виде прямоугольника. Есть несколько выключателей, каждый из которых меняет состояние всех лампочек в строке или столбце. Вначале все лампочки погашены. Докажите, что можно зажечь лампочки так чтобы они горели в шахматном порядке.
- Клетки прямоугольной доски покрасили в шахматном порядке. После этого в каждую клетку написали целое число. Оказалось, что сумма чисел в каждой строке и каждом столбце – четная.
 - Докажите, что сумма чисел в любом кресте (строка и столбец без клетки стоящей на их пересечении) четная.
 - Докажите, что сумма всех чисел написанных на черных клетках тоже четная.
- 100 натуральных чисел выписаны в ряд. Известно, что сумма любых трех подряд идущих чисел делится на 3 нацело, а сумма любых четырех подряд идущих чисел при делении на 3 дает остаток 2. Какие остатки могут давать эти числа при делении на 3?
- Даны n чисел. Известно, что сумма любых k из них положительна. Докажите, что сумма всех чисел положительна.
- На доске написаны 30 целых чисел. Известно, что если стереть любые несколько (можно и одно) из этих чисел, то среднее арифметическое оставшихся будет целым. Докажите, что среднее арифметическое всех 30 чисел целое.
(Вопрос на засыпку: при чем тут задача из матпризника?)



Задачи для большего размышления.

- По кругу стоят 41 целое неотрицательное число, сумма которых равна 72. Докажите, что среди них есть четыре идущих подряд числа, сумма которых больше 7.
- На доске написаны n целых чисел. Известно, что если стереть любые несколько (можно и одно) из этих чисел, то среднее арифметическое оставшихся будет целым. При каких натуральных n можно утверждать, что среднее арифметическое всех n чисел целое?
- Продавец разложил гири массами 1, 2, 3, ..., 100 грамм в произвольном порядке m_1, m_2, \dots, m_{100} . Докажите, что гири массами $|m_1-1|, |m_2-2|, \dots, |m_{100}-100|$ можно расположить на двух чашках весов так, что весы окажутся в равновесии.