

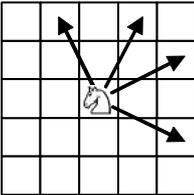
Математический кружок 7 класс

Занятие 17

Полуинвариант

12.02.2009

Полуинвариантом называется величина, которая в процессе преобразований изменяется монотонно, т.е. постоянно увеличивается или постоянно уменьшается.

1. На доске написаны несколько натуральных чисел. Каждую минуту выбирают какие-то два из них (x и y) и заменяют их на числа $x-2$ и $y+1$. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.
2. В клетках таблицы 9×9 расставлены $+1$ и -1 . Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять все знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что за несколько таких операций можно сделать сумму всех чисел в таблице неотрицательной.
3. В клетках таблицы 9×9 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные.
 - а) Докажите, что через некоторое время во всей доске плюсов будет больше чем минусов.
 - б) Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше чем минусов.
4. Фирма «Селекционер» плодит монстров. Каждый день монстры мутируют. Если сегодня монстр имеет m ручек и n ножек, то завтра он будет иметь $2m-n$ ручек и $2n-m$ ножек. Монстр погибает, когда число ручек или ножек становится отрицательным.
 - а) Изначально у монстра 999 ручек и 1000 ножек. Докажите, что через некоторое время монстр погибнет.
 - б) Докажите, что монстр будет жить вечно только если у него ручек столько же, сколько и ножек.
5. Есть куча из n камней. Разрешается заменять кучу на любое количество куч с меньшим количеством камней (возможно, различным в разных кучах). Докажите, что наступит момент, когда уже нельзя будет сделать ни одной такой операции.
6. В некоторой клетке доски 100×100 стоит конь. Коню разрешены следующие четыре хода – см. рис. Может ли конь скакать бесконечно долго?
7. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.
8. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.
9. В парламенте у каждого его члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага (считается, что вражда взаимна).