

Два в степени два в степени два

1. Сумма двух натуральных чисел равна 153. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?
2. Имеется n целых чисел ($n > 1$). Известно, что каждое из них сравнимо по модулю n с произведением всех остальных. Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на n .
3. a, b — целые числа. Оказалось, что $(a, b) + [a, b] = a + b$. Докажите, что одно из чисел делится на другое.
4. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ выбраны точки E и F такие, что $AE = AB$ и $AF = AD$. Пусть G и H — основания перпендикуляров, опущенных на сторону AB из точек E и F соответственно. Докажите, что $AG + FH = AC$.
5. Какое число больше: 31^{11} или 17^{14} ?
6. Дан правильный 45-угольник. Можно ли в его вершинах расставить цифры 0–9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?
7. Имеется 7 палок длины которых заключены между 0,1 м и 1 м. Докажите, что из каких-то трех из них можно сложить треугольник.