

Матбой 29

1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точка K — середина диагонали BD . Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD и $AD = 3BC$. Докажите, что $AC = 2BC$.

2. $a > 1$ — натуральное число. Некоторые целые неотрицательные числа покрашены в зеленый цвет таким образом, что если число k зеленое, то числа $k + 2a$ и $\left[\frac{k}{a}\right]^1$ тоже зеленые. Докажите, что все целые неотрицательные числа зеленые.

3. Сумма чисел x, y, z отлична от 0. Докажите, что $\frac{x(y-z)}{y+z} + \frac{y(z-x)}{z+x} + \frac{z(x-y)}{x+y} = 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы два из чисел x, y, z равны.

4. В ряд стоят несколько человек, каждый из которых — рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Семеро из них на вопрос: “Верно ли, что все люди, стоящие справа от Вас, — рыцари, а все люди слева от Вас — лжецы?” ответили “Да”, а остальные — “Нет”. Известно, что среди стоящих есть и рыцари, и лжецы. Сколько среди них может быть лжецов?

5. Натуральное число делится на 42. Сумма цифр, не участвующих в его написании, равна 25. Докажите, что в нем есть две одинаковые цифры.

6. В однокруговом волейбольном турнире участвовали 14 команд. Интересной назовем команду, выигравшую нечетное число матчей, а особенной — команду, выигравшую нечетное число матчей у интересных. Докажите, что число особенных команд четно. (Напомним, что в волейболе ничьих не бывает).

7. В клуб пришли 20 джентльменов: некоторые — в шляпах, некоторые — без. Затем время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал на голову другому джентльмену, у которого в этот момент шляпы не было. Через час 10 джентльменов заявили: “Я отдавал шляпу чаще, чем получал!” Сколько джентльменов пришли в клуб в шляпах?

8. В равнобедренном треугольнике ABC с углами $\angle A = \angle B = 80^\circ$ биссектриса угла C пересекает серединный перпендикуляр к AC в точке O . Прямая BO пересекает сторону AC в точке D . Докажите, что $AB = CD$.

¹Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число не превосходящее x .

Матбой – 29

1. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точка K — середина диагонали BD . Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD и $AD = 3BC$. Докажите, что $AC = 2BC$.

2. В 10 аптеках города Мехико марлевая повязка стоила 10 песо. После начала свиного гриппа каждый день в каждой аптеке повязка дорожала либо в 2, либо в 3 раза. Через 10 дней цены на повязку во всех аптеках оказались различными. Докажите, что отношение максимальной цены к минимальной больше 25.

3. В клуб пришли 20 джентльменов: некоторые — в шляпах, некоторые — без. Затем время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал на голову другому джентльмену, у которого в этот момент шляпы не было. Через час 10 джентльменов заявили: “Я отдавал шляпу чаще, чем получал!” Сколько джентльменов пришли в клуб в шляпах?

4. В треугольнике ABC угол C — прямой, а угол A равен 30° . На сторонах AB и AC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABD и ACE . Отрезки AB и DE пересекаются в точке G . Докажите, что G — середина DE .

5. В ряд стоят несколько человек, каждый из которых — рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Семеро из них на вопрос: “Верно ли, что все люди, стоящие справа от Вас, — рыцари, а все люди слева от Вас — лжецы?” ответили “Да”, а остальные — “Нет”. Известно, что среди стоящих есть и рыцари, и лжецы. Сколько среди них может быть лжецов?

6. Выпуклый многоугольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями. Докажите, что в его вершинах можно так расставить единицы, двойки, тройки и нули, чтобы для любых двух треугольников разбиения, граничащих по стороне, в вершинах образованного ими четырехугольника стояли цифры 2, 0, 1, 3 (в произвольном порядке).

7. Вася съедает в день или 3 сосиски и 1 котлету, или 5 сосисок и 3 котлеты, или 4 сосиски и 2 котлеты. За несколько дней Вася съел 100 котлет. Мог ли он за тот же период времени съесть 166 сосисок?

8. Число $1/97$ представили в виде бесконечной десятичной дроби. Первую ненулевую цифру после запятой вычеркнули. Представьте получившееся число в виде обыкновенной дроби.