

**Числа Ферма**

1. Пусть  $a > 1$  — натуральное число. Найдите  $(a^n - 1, a^m - 1)$ .
2. Пусть  $p$  — простое и  $n < p < 2n$ . Докажите, что  $C_{2n}^n$  делится на  $p$ .
3. Семь грибников собрали вместе 59 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 33 грибов.
4. Про целые числа  $x, y, z$  известно, что  $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$ . Докажите, что  $x + y + z$  делится на 27.
5. Для любого положительного числа  $a$  докажите неравенство

$$a + a^9 + a^{25} < 1 + a^4 + a^{16} + a^{36}.$$

6. Точки  $K$  и  $L$  на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  таковы, что  $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$ . Точка  $M$  на  $BC$  такова, что  $\angle MKC = \angle BKM$ .  $ML$  — биссектриса угла  $KMB$ . Найдите угол  $MLC$ .
7. Докажите, что если число  $2^n + 1$  — простое, то  $n$  — степень двойки.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА. Числа вида  $2^{2^n} + 1$  называются *числами Ферма*. Ферма выдвинул гипотезу, что все они простые. Однако эта гипотеза была опровергнута Эйлером в 1732 году, нашедшим разложение числа  $2^{2^5} + 1$  на простые делители:

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$