

**Отличная**

1. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга а) три ладьи; б) двух королей?

2. В маленьком приходе графства Липшир всего 5 усадеб, некоторые из них соединены дорогами. Известно, что любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся три усадьбы, никакие две из которых не соединены дорогой.

3. Докажите по индукции, что для любого натурального  $n$  выполнено равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}.$$

---

4. Известно, что  $x + \frac{1}{x}$  — целое число. Докажите, что тогда при любом натуральном  $n$  число  $x^n + \frac{1}{x^n}$  — тоже целое.

5. Средний возраст 11 игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся — 21 год. Сколько лет получившему травму?

6. Решите уравнение в натуральных числах:  $ab(a+b) = 15015$ .

7. Преобразуйте выражение так, чтобы в нем не осталось многоточия:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k.$$

*Указание: попробуйте посмотреть на эти числа в треугольнике Паскаля*

8. На плоскости нарисованы несколько окружностей, причем любые две пересекаются. Докажите, что их можно было нарисовать не отрывая карандаш от бумаги (рисовать линию дважды нельзя).

9. В графе степень каждой вершины хотя бы  $k \geq 2$ . Докажите, что в нем есть а) простой путь длины хотя бы  $k$ ; б) простой цикл длины хотя бы  $k+1$ .

10. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 4 разных видов. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев знает, где какой ключ лежит. Докажите, что сторож Сергеев может сделать дубликаты ключей двух кабинетов, с помощью которых можно открыть все комнаты.