Сколько нас? **Четыре!**

1. Найдите, пожалуйста, количество способов разбить 16 человек на пары.

2. Докажите алгебраически (т.е. используя формулу), что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

3. В графе на n вершинах степень каждой вершины не превосходит 9. Докажите, что его вершины можно покрасить в 10 цветов правильным образом, то есть так, чтобы вершины, соединенные ребром, были разного цвета.

---

4. Докажите во славу Ньютона и бинома: $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

5. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

6. Можно ли представить единицу как сумму 10 дробей, числитель каждой из которых равен 1, а знаменатель — нечетное число?

7. Число *выглядит как простое*, если оно составное, но не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. (Пример такого числа — 91.) Среди чисел от 1 до 1000 имеется 168 простых. А сколько натуральных чисел, не превосходящих 1000, выглядят как простые?

8. Сколькими способами хромая ладья может дойти с поля a1 до поля h8, не побывав на поле e6? (хромая ладья ходит на одну клетку вправо или вверх)

9. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Запомните эту формулу.

10. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.
