

Программа ноябрьского зачета

1. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры являются вершинами квадрата.
2. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. а) Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из этой же вершины. б) Докажите, что указанные отрезок и медиана перпендикулярны.
3. Поворот. Докажите, что поворот является движением. Как построить образ данной: а) прямой; б) окружности при данном повороте? Чему равен угол между прямой и ее образом при повороте на угол α ?
4. На сторонах АВ, ВС, CD и DA квадрата ABCD взяты соответственно точки D₁, A₁, B₁, и C₁, делящие его стороны в равных отношениях при обходе по часовой стрелке. При пересечении прямых AA₁, BB₁, CC₁ и DD₁ образуется четырехугольник KLMN. Докажите, что он является квадратом.
5. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все точки, кроме этих, стерли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.
6. Впишите квадрат в данный параллелограмм.
7. На сторонах BC и CD квадрата ABCD взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.
8. Через вершины треугольника ABC провели прямые, параллельные противоположным сторонам. Докажите, что центры вписанных окружностей образовавшихся треугольников A₁BC, AB₁C и ABC₁ являются вершинами треугольника, равного треугольнику ABC.
9. Свойство средней линии треугольника и обратные теоремы.
10. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны, противолежащей этой вершине.
11. Теорема Вариньона.
12. Восстановите пятиугольник по серединам всех его сторон.
13. Точки K, L, M, N – середины сторон соответственно АВ, ВС, CD и DE пятиугольника ABCDE, а точки P и Q – середины отрезков соответственно KM и LN. Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = 1/4 AE$.
14. Дан треугольник ABC. На его сторонах построены внешним образом квадраты ABMK и BCXY. Докажите, что середины отрезков AC и MY и центры построенных квадратов являются вершинами еще одного квадрата.
15. Теорема о точке пересечения медиан треугольника.
16. Постройте треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника.
17. Четырехугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Найдите расстояние от точки O до стороны АВ, если $CD = a$.
18. В треугольнике ABC проведены высоты AA₁ и CC₁. Биссектриса угла BAA₁ пересекает сторону BC в точке M, а высоту CC₁ – в точке N. Биссектриса угла BCC₁ пересекает сторону АВ в точке P, а высоту AA₁ – в точке K. Докажите, что PMKN – ромб.
19. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.
20. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

Программа ноябрьского зачета

1. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры являются вершинами квадрата.
2. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. а) Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из этой же вершины. б) Докажите, что указанные отрезок и медиана перпендикулярны.
3. Поворот. Докажите, что поворот является движением. Как построить образ данной: а) прямой; б) окружности при данном повороте? Чему равен угол между прямой и ее образом при повороте на угол α ?
4. На сторонах АВ, ВС, CD и DA квадрата ABCD взяты соответственно точки D₁, A₁, B₁, и C₁, делящие его стороны в равных отношениях при обходе по часовой стрелке. При пересечении прямых AA₁, BB₁, CC₁ и DD₁ образуется четырехугольник KLMN. Докажите, что он является квадратом.
5. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все точки, кроме этих, стерли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.
6. Впишите квадрат в данный параллелограмм.
7. На сторонах BC и CD квадрата ABCD взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.
8. Через вершины треугольника ABC провели прямые, параллельные противоположным сторонам. Докажите, что центры вписанных окружностей образовавшихся треугольников A₁BC, AB₁C и ABC₁ являются вершинами треугольника, равного треугольнику ABC.
9. Свойство средней линии треугольника и обратные теоремы.
10. Докажите, что расстояние от вершины треугольника до ортоцентра вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны, противолежащей этой вершине.
11. Теорема Вариньона.
12. Восстановите пятиугольник по серединам всех его сторон.
13. Точки K, L, M, N – середины сторон соответственно АВ, ВС, CD и DE пятиугольника ABCDE, а точки P и Q – середины отрезков соответственно KM и LN. Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $PQ = 1/4 AE$.
14. Дан треугольник ABC. На его сторонах построены внешним образом квадраты ABMK и BCXY. Докажите, что середины отрезков AC и MY и центры построенных квадратов являются вершинами еще одного квадрата.
15. Теорема о точке пересечения медиан треугольника.
16. Постройте треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника.
17. Четырехугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность с центром O. Найдите расстояние от точки O до стороны АВ, если $CD = a$.
18. В треугольнике ABC проведены высоты AA₁ и CC₁. Биссектриса угла BAA₁ пересекает сторону BC в точке M, а высоту CC₁ – в точке N. Биссектриса угла BCC₁ пересекает сторону АВ в точке P, а высоту AA₁ – в точке K. Докажите, что PMKN – ромб.
19. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.
20. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.