

**Программа сентябрьского зачета**

1. Верен ли признак равенства треугольников по двум сторонам и углу? Докажите почти признак равенства треугольников:
2. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его биссектрисой, то он равнобедренный.
3. Постройте треугольник по двум углам и периметру.
4. В треугольнике  $ABC \angle A = \alpha$ . Найдите угол между а) биссектрисами углов В и С. б) высотами ВМ и СН. В пункте б) рассмотрите случаи  $\alpha < 90^\circ$  и  $\alpha > 90^\circ$ .
5. Найдите сумму пяти углов при вершинах разносторонней пятиконечной звезды.
6. Докажите признак равенства треугольников по медиане и двум углам, на которые она разбивает угол при вершине.
7. Внутри квадрата ABCD отмечена точка Е так, что  $\angle EBC = \angle ECB = 15^\circ$ . Найдите  $\angle EAD$ .
8. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC. На стороне BC отмечены точки М и К, а на стороне АВ – точка Р, причем  $AC = AM = MP = PK = KB$ . Найдите углы треугольника ABC.
9. Докажите, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный, а эта сторона – его гипотенуза.
10. В треугольнике ABC проведены медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  и высоты  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$ . Докажите, что длина ломаной  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$  равна периметру треугольника ABC.
11. На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника ABC выбраны точки Р и Q так, что  $AP = AC$  и  $BQ = BC$ . Найдите угол PCQ.
12. На стороне BC квадрата ABCD выбрана точка М, а на продолжении стороны АВ за точку А – точка Р. Прямая MP пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что  $MN = DN$ . Докажите, что треугольник MDP прямоугольный.
13. Докажите свойство прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$  и две обратные ему теоремы.
14. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен  $15^\circ$ . Найдите отношение высоты, опущенной на гипотенузу, к гипотенузе.
15. Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратную теорему.
16. Докажите неравенство треугольника.
17. Докажите, что если медиана AM треугольника ABC меньше половины стороны BC, то угол А тупой, если больше – то острый, а если равна – то прямой.
18. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.
19. Геометрическим местом точек ( ГМТ ), равноудаленных от концов данного отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.
20. Докажите, что около каждого треугольника можно описать окружность, и притом единственную. Ее центром является точка пересечения всех трех серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
21. Найдите геометрическое место точек данного неразвернутого угла, равноудаленных от его сторон.
22. Докажите, что в каждый треугольник можно вписать окружность, и притом единственную. Ее центром является точка всех трех пересечения биссектрис треугольника.
23. Докажите, что у треугольника существуют ровно три невписанных окружности. Биссектриса внутреннего угла треугольника проходит через точку пересечения биссектрис внешних углов треугольника, не смежных с ним.
24. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден: а) под прямым углом; б) под острым углом; в) под тупым углом.
25. Даны треугольники ABC и  $A_1B_1C_1$ . Известно, что  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$ . Докажите, что  $BC > B_1C_1$ .
26. Точки М и N – середины равных сторон AD и BC четырехугольника ABCD. Серединные перпендикуляры к сторонам АВ и CD пересекаются в точке Р. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку Р.

**Программа сентябрьского зачета**

1. Верен ли признак равенства треугольников по двум сторонам и углу? Докажите почти признак равенства треугольников:
2. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его биссектрисой, то он равнобедренный.
3. Постройте треугольник по двум углам и периметру.
4. В треугольнике  $ABC \angle A = \alpha$ . Найдите угол между а) биссектрисами углов В и С. б) высотами ВМ и СН. В пункте б) рассмотрите случаи  $\alpha < 90^\circ$  и  $\alpha > 90^\circ$ .
5. Найдите сумму пяти углов при вершинах разносторонней пятиконечной звезды.
6. Докажите признак равенства треугольников по медиане и двум углам, на которые она разбивает угол при вершине.
7. Внутри квадрата ABCD отмечена точка Е так, что  $\angle EBC = \angle ECB = 15^\circ$ . Найдите  $\angle EAD$ .
8. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC. На стороне BC отмечены точки М и К, а на стороне АВ – точка Р, причем  $AC = AM = MP = PK = KB$ . Найдите углы треугольника ABC.
9. Докажите, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный, а эта сторона – его гипотенуза.
10. В треугольнике ABC проведены медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  и высоты  $AA_2$ ,  $BB_2$  и  $CC_2$ . Докажите, что длина ломаной  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$  равна периметру треугольника ABC.
11. На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника ABC выбраны точки Р и Q так, что  $AP = AC$  и  $BQ = BC$ . Найдите угол PCQ.
12. На стороне BC квадрата ABCD выбрана точка М, а на продолжении стороны АВ за точку А – точка Р. Прямая MP пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что  $MN = DN$ . Докажите, что треугольник MDP прямоугольный.
13. Докажите свойство прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$  и две обратные ему теоремы.
14. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен  $15^\circ$ . Найдите отношение высоты, опущенной на гипотенузу, к гипотенузе.
15. Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратную теорему.
16. Докажите неравенство треугольника.
17. Докажите, что если медиана AM треугольника ABC меньше половины стороны BC, то угол А тупой, если больше – то острый, а если равна – то прямой.
18. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.
19. Геометрическим местом точек ( ГМТ ), равноудаленных от концов данного отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.
20. Докажите, что около каждого треугольника можно описать окружность, и притом единственную. Ее центром является точка пересечения всех трех серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
21. Найдите геометрическое место точек данного неразвернутого угла, равноудаленных от его сторон.
22. Докажите, что в каждый треугольник можно вписать окружность, и притом единственную. Ее центром является точка всех трех пересечения биссектрис треугольника.
23. Докажите, что у треугольника существуют ровно три невписанных окружности. Биссектриса внутреннего угла треугольника проходит через точку пересечения биссектрис внешних углов треугольника, не смежных с ним.
24. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден: а) под прямым углом; б) под острым углом; в) под тупым углом.
25. Даны треугольники ABC и  $A_1B_1C_1$ . Известно, что  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$ . Докажите, что  $BC > B_1C_1$ .
26. Точки М и N – середины равных сторон AD и BC четырехугольника ABCD. Серединные перпендикуляры к сторонам АВ и CD пересекаются в точке Р. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку Р.