

Повторение - 1

Равные треугольники. Равнобедренный треугольник

1. Верен ли признак равенства треугольников по: а) двум углам и стороне; б) двум сторонам и углу?
2. Докажите почти признак равенства треугольников: Если две стороны и угол, противолежащий одной из них, одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники либо равны, либо углы, противолежащие второй паре равных сторон, составляют в сумме 180° .
3. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его биссектрисой, то он равнобедренный.
4. Докажите признаки равенства треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной: а) к одной из них; б) к третьей стороне.
5. Постройте треугольник по a , m_a и h_a .
6. (*) Постройте треугольник по двум углам и периметру.

Параллельность. Счет углов

7. Постройте прямую, параллельную данной.
8. Найдите сумму внутренних углов а) четырехугольника; б) выпуклого n -угольника.
9. В треугольнике $ABC \angle A = \alpha$. Найдите угол между а) биссектрисами углов B и C . б) высотами BM и CH . В пункте б) рассмотрите случаи $\alpha < 90^\circ$ и $\alpha > 90^\circ$.
10. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M , причем $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK .
11. (*) Найдите сумму пяти углов при вершинах разносторонней пятиконечной звезды.

Домашнее задание

12. а) Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.
б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
13. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.
14. Докажите признак равенства треугольников по медиане и двум углам, на которые она разбивает угол при вершине.
15. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин A и B , пересекаются в точке H , причем $\angle AHB = 140^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C , – в точке K , причем $\angle BKC = 110^\circ$. Найдите $\angle ABC$.
16. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены во внешнюю сторону правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL правильный.

Повторение – 2

Счет углов

*Если трудно достичь цели, достигни чего-нибудь.
А потом проверь: вдруг это и есть цель?*

Задача 9 из прошлого листка.

1. а) Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка E так, что $\angle EAD = \angle EDA = 60^\circ$. Найдите $\angle EBC$. б) Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка E так, что $\angle EBC = \angle ECB = 15^\circ$. Найдите $\angle EAD$.
2. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC . На стороне BC отмечены точки M и K , а на стороне AB – точка P , причем $AC = AM = MP = PK = KB$. Найдите углы треугольника ABC .

Задача 11* из прошлого листка.

Медиана прямоугольного треугольника

3. а) Точка B принадлежит окружности с диаметром AC . Докажите, что $\angle ABC = 90^\circ$.
б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
4. Докажите, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный, а эта сторона – его гипотенуза.
5. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.
6. На гипотенузе AB треугольника ABC отметили точку K так, что $AK = CK$. Можно ли утверждать, что K – середина гипотенузы?
7. Докажите, что две вершины треугольника и основания опущенных из них высот лежат на одной окружности. Где находится ее центр?
8. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 и высоты AA_2 , BB_2 и CC_2 . Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC .

Домашнее задание

9. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AP = AC$ и $BQ = BC$. Найдите угол PCQ .
10. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой, проведенными из одной вершины треугольника, равен полуразности двух других его углов.
11. На медиане BM треугольника ABC взята точка K так, что $\angle AKM = \angle CBK$. Докажите, что $AK = BC$.
12. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка M , а на продолжении стороны AB за точку A – точка P . Прямая MP пересекает диагональ AC в точке N . Известно, что $MN = DN$. Докажите, что треугольник MDP прямоугольный.

А еще решите задачу 15 из предыдущего листка.

Повторение – 3

Прямоугольный треугольник с углом в 30°

17. а) Докажите свойство прямоугольного треугольника с углом 30° ;
б) Сформулируйте и докажите две обратные теоремы.
18. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 15° . Найдите отношение высоты, опущенной на гипотенузу, к гипотенузе.
Геометрические неравенства
19. Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратную теорему.
20. Докажите, что перпендикуляр короче наклонной.
21. Докажите неравенство треугольника и его следствия:
 - а. $|a-b| < c < a+b$, где a, b, c – стороны треугольника.
 - б. $AB \leq AC + BC$ для любых точек A, B, C .
22. Докажите, что если медиана AM треугольника ABC меньше половины стороны BC , то угол A тупой, если больше – то острый, а если равна – то прямой.
Домашнее задание
23. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Определите, в каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.
24. BL – биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $BC > LC$.
25. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.
А еще решите задачи 22 и 28 из предыдущего листка.

Повторение – 4

ГМТ. Серединный перпендикуляр. Биссектриса. Окружности, связанные с треугольником.

Теорема 1. Геометрическим местом точек (ГМТ), равноудаленных от концов данного отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Для доказательства этой теоремы (и вообще, любой теоремы про ГМТ) требуется доказать два утверждения:

1) Если точка принадлежит серединному перпендикуляру к данному отрезку, то она равноудалена от его концов. 2) Если точка равноудалена от концов данного отрезка, то она принадлежит его серединному перпендикуляру.

29. Как построить серединный перпендикуляр данного отрезка циркулем и линейкой?

Теорема 2. 1) Около каждого треугольника можно описать окружность, и притом единственную. Ее центром является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. 2) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема 3. Геометрическим местом точек данного неразвернутого угла, равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла

30. Как построить биссектрису данного угла циркулем и линейкой?

Теорема 4. 1) В каждый треугольник можно вписать окружность, и притом единственную. Ее центром является точка пересечения биссектрис треугольника.

2) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема 5. 1) Для каждой стороны треугольника существует, и притом единственная, окружность, касающаяся этой стороны и продолжений двух других сторон. Ее центром является точка пересечения биссектрис двух внешних и одного внутреннего угла

треугольника. 2) Биссектриса внутреннего угла треугольника проходит через точку пересечения биссектрис внешних углов треугольника, не смежных с ним.

Задачи

31. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден а) под прямым углом; б) под острым углом; в) под тупым углом.
32. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M , биссектрисы B_1B_2 и C_1C_2 треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке N . Докажите, что точки A, M, N лежат на одной прямой.
33. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$. Докажите, что $BC > B_1C_1$.
34. Пусть O_A, O_B, O_C – центры вневписанных окружностей треугольника ABC . Докажите, что точки A, B, C – основания высот треугольника $O_AO_BO_C$.

Домашнее задание

35. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой.
36. Докажите, что в любом треугольнике центр одной из вневписанных окружностей, центр вписанной окружности и какие-то две вершины треугольника лежат на одной окружности.
37. В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 45^\circ$. Высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке N . Докажите, что $BH = AC$.
38. Точки M и N – середины равных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P .

А еще решите задачу 34 из предыдущего листка.

Повторение – 5

Для начала решите задачи 42 и 43 с предыдущего листка.

48. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. На стороне AC взята точка M так, что $\angle MBC = 30^\circ$. Докажите, что M – середина AC .
49. Биссектриса внутреннего угла при вершине A и биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите $\angle BMC$, если $\angle BAC = 40^\circ$.
50. Прямоугольный лист бумаги $ABCD$ согнули по линии BK , точка K принадлежит стороне CD . При этом точка C совпала с серединой стороны AD . Найдите отношение $DK : AB$.
51. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от сторон данного неразвернутого угла.
52. (*) Докажите, что наибольшее расстояние между точками треугольника равно одной из его сторон.
53. (*) Точка X движется по окружности с центром O . На каждом радиусе OX откладывается отрезок OM , длина которого равна расстоянию от точки X до заданного диаметра окружности. Найдите геометрическое место точек M .

Домашнее задание (к уроку после зачета)

54. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведенная из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведенная из той же вершины.
55. Две окружности пересекаются в точках A и B , в одной из них проведен диаметр AM , в другой – AN . Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.
56. Постройте треугольник по стороне c , сумме сторон $a+b$ и углу α , противолежащему стороне a .
57. В треугольнике высота, опущенная на сторону a , не меньше a , а высота, опущенная на сторону b , не меньше b . Найдите углы треугольника.
58. Докажите, что в равнобедренном треугольнике с углом при вершине 20° боковая сторона меньше утроенного основания.