Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 15: малая теорема Ферма

1) Обозначим через a_k остаток от деления числа $5k$ на 7.
а) Докажите, что $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
б) Докажите, что $5 \cdot (5 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (5 \cdot 6) \equiv 6! \pmod 7$.
в) Выведите отсюда, что $5^6 \equiv 1 \pmod 7$.

2) Пусть a — натуральное число, p — простое, причем $p \not| a$. Обозначим через a_k остаток от деления числа ak на p.
а) Докажите, что $\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$.
б) Рассмотрев произведение $a_1 a_2 \ldots a_{p-1}$, докажите, что $a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod p$.
в) Выведите отсюда утверждение малой теоремы Ферма:
Если p — простое число, причем число a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

3) Найдите остаток от деления
а) 2^{100} на 101; б) 3^{102} на 101; в) 8^{900} на 29; г) 3^{2012} на 43; д) 8^{1543} на 48.
(Подсказка к пункту д: найдите $8^{1541} \bmod 3$.)

4) Докажите, что если p простое и $p > 2$, то $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$.

5) Докажите, что если p и q — различные простые числа, то $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

6) Пусть p — простое число, а k — наименьшее натуральное число, такое что $a^k \equiv 1 \pmod p$. Докажите, что k является делителем числа $p-1$.

7) Пусть $p \neq q$ — простые числа и n не делится ни на p, ни на q. Докажите, что $n^{(p-1)(q-1)} - 1$ делится на pq.

8) Докажите, что $m^5 n - mn^5$ кратно 30 при любых целых m и n.

9) Докажите, что если целое число a не кратно 17, то $a^8 - 1$ или $a^8 + 1$ кратно 17.

10) Найдите все такие простые числа p, что $5^{p^2} + 1$ кратно p.

11) Докажите, что если p — простое число, то сумма $1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1}$ при делении на p дает остаток $p-1$.

12) Пусть p — простое число, отличное от 2, 3 и 5. Докажите, что число, записанное $p-1$ единицей, кратно p. (Например, 111111 кратно 7.)

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 15: малая теорема Ферма

1) Обозначим через a_k остаток от деления числа $5k$ на 7.
а) Докажите, что $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
б) Докажите, что $5 \cdot (5 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (5 \cdot 6) \equiv 6! \pmod 7$.
в) Выведите отсюда, что $5^6 \equiv 1 \pmod 7$.

2) Пусть a — натуральное число, p — простое, причем $p \not| a$. Обозначим через a_k остаток от деления числа ak на p.
а) Докажите, что $\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\} = \{1, 2, \ldots, p-1\}$.
б) Рассмотрев произведение $a_1 a_2 \ldots a_{p-1}$, докажите, что $a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod p$.
в) Выведите отсюда утверждение малой теоремы Ферма:
Если p — простое число, причем число a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

3) Найдите остаток от деления
а) 2^{100} на 101; б) 3^{102} на 101; в) 8^{900} на 29; г) 3^{2012} на 43; д) 8^{1543} на 48.
(Подсказка к пункту д: найдите $8^{1541} \bmod 3$.)

4) Докажите, что если p простое и $p > 2$, то $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$.

5) Докажите, что если p и q — различные простые числа, то $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

6) Пусть p — простое число, а k — наименьшее натуральное число, такое что $a^k \equiv 1 \pmod p$. Докажите, что k является делителем числа $p-1$.

7) Пусть $p \neq q$ — простые числа и n не делится ни на p, ни на q. Докажите, что $n^{(p-1)(q-1)} - 1$ делится на pq.

8) Докажите, что $m^5 n - mn^5$ кратно 30 при любых целых m и n.

9) Докажите, что если целое число a не кратно 17, то $a^8 - 1$ или $a^8 + 1$ кратно 17.

10) Найдите все такие простые числа p, что $5^{p^2} + 1$ кратно p.

11) Докажите, что если p — простое число, то сумма $1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1}$ при делении на p дает остаток $p-1$.

12) Пусть p — простое число, отличное от 2, 3 и 5. Докажите, что число, записанное $p-1$ единицей, кратно p. (Например, 111111 кратно 7.)