Занятие 13: переливания двумя вёдрами (дополнение)

Постановка задачи

Вы, наверняка, на математических кружках, уроках информатики или где-то ещё сталкивались с задачами на переливания. Стандартная задача такого типа устроена очень просто: есть сосуды объёмами a и b литров ($a > b > 0$, оба числа целые) и озеро. Требуется отмерить при помощи этих сосудов $x < a$ литров.

Такую задачу очень просто решить: надо заполнить большой сосуд, затем вычёрпывать из него воду маленьким сосудом до тех пор, пока можем. Остаток нужно перелить в маленький сосуд, далее наполнить большой до краёв, долить из него маленький до упора, затем повторить всю вышеописанную последовательность действий. Практика показывает, что рано или поздно мы придём к успеху.[1] Теория сравнений позволяет просто и элегантно доказать результативность приведённого алгоритма.

Очевидные соображения

Если x не кратно НОД(a, b), то x литров получить нельзя. Если же НОД$(a, b) \mid x$, то можно измерять объёмы не в литрах, а в «псевдолитрах» таких, что 1 «псевдолитр» есть x литров. Таким образом задача сводится к случаю взаимно простых a и b.

По этой причине далее без ограничения общности считаем a и b взаимно простыми.

Формализация алгоритма

Распишем поэтапно количество воды в сосудах. Пусть b_n литров находится в маленьком сосуде после n-й итерации алгоритма; $b_0 = 0$.

1) В большом сосуде a литров, в маленьком b_n литров.

2) Доливаем маленький сосуд до краёв. В большом сосуде $a + b_n - b$ литров, в маленьком b литров.

3) Вычёрпываем маленьким сосудом большой. В большом сосуде станет $(a + b_n - b) \bmod b$ литров, в маленьком 0 литров.

4) Переливаем остаток в маленький сосуд. В маленьком теперь $b_{n+1} = (a + b_n - b) \bmod b$ литров.

Арифметика остатков спешит на помощь

Рассмотрим рекуррентное соотношение для b_n по модулю b. Получим

$$b_0 \equiv 0; \quad b_{n+1} \equiv b_n + a.$$

Нетрудно видеть, что $b_n \equiv na$. Поскольку a и b взаимно просты, то мы можем получить значение b_n из любого класса (номер n нужной итерации будет представителем частного при делении b_n на a по модулю b). А так как $0 \leqslant b_n < b$, то мы можем получить любое значение b_n путём нескольких итераций (в целочисленном диапазоне $[0, b)$ есть ровно по одному представителю каждого класса).

Осталось заметить, что если $x \geqslant b$, то мы его получим в большом сосуде на той же итерации алгоритима, что и $b_n \equiv x - a$.

[1] Есть также аналогичный алгоритм, заключающийся в наполнении большого сосуда при помощи маленького. Он тоже работает.