

Занятие 7: отношение эквивалентности

Определение. Пусть M — множество. Произвольное множество $R \subset \{(a, b) \mid a, b \in M\}$ упорядоченных пар элементов M называется (*бинарным*) *отношением* на M . Пишут: $(a, b) \in R$ или aRb .

Определение. Отношение R на M называется:

рефлексивным, если для всех $a \in M$ выполняется $(a, a) \in R$ (aRa);

симметричным, если из $(a, b) \in R$ следует $(b, a) \in R$ ($aRb \Rightarrow bRa$);

транзитивным, если из $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$ следует $(a, c) \in R$ ($aRb, bRc \Rightarrow aRc$).

Определение. Отношение R на M называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Для обозначения отношений эквивалентности используется символ \sim (т.е. вместо aRb пишут $a \sim b$).

1) Укажите, какие из следующих отношений являются рефлексивными, симметричными, транзитивными, отношениями эквивалентности:

- а) “ a и b учатся в одном классе” на множестве учеников гимназии 1543;
- б) “ a является сыном b ” на множестве людей на Земле;
- в) “ a моложе b ” на множестве людей на Земле;
- г) “ a является братом b ” на множестве людей на Земле;
- д) “ a знаком с b ” на множестве людей на Земле;
- е) “ a и b родились в одном месяце” на множестве людей на Земле;
- ж) “ a любит b ” на множестве людей на Земле.

Определение. Пусть \sim — отношение эквивалентности на M и пусть a — произвольный элемент множества M . Множество $[a] = \{x \in M \mid a \sim x\}$ называется *классом эквивалентности* элемента a .

2) Для отношений эквивалентности из предыдущей задачи укажите разбиение на классы эквивалентности.

3) Докажите, что для любого отношения эквивалентности классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают. Докажите, что отношение эквивалентности на M задает разбиение множества M на непересекающиеся классы эквивалентности.

4) Укажите, какие из следующих отношений являются рефлексивными, симметричными, транзитивными, отношениями эквивалентности. Для отношений эквивалентности укажите разбиение на классы эквивалентности:

- а) “ $a \mid b$ ” на множестве целых чисел;
- б) “ a и b имеют одинаковый остаток при делении на 3” на множестве целых чисел;
- в) “ $a > b$ ” на множестве целых чисел;
- г) “ a и b имеют одну и ту же последнюю цифру” на множестве целых чисел;
- д) “площадь фигуры a равна площади фигуры b ” на множестве фигур на плоскости;
- е) “сторона и прилежащие углы треугольника a равны стороне и прилежащим углам треугольника b ” на множестве треугольников на плоскости;
- ж) “две стороны треугольника a равны двум сторонам треугольника b ” на множестве треугольников на плоскости;
- з) “два угла треугольника a равны двум углам треугольника b ” на множестве треугольников на плоскости.

5) Укажите, какие из следующих отношений являются рефлексивными, симметричными, транзитивными, отношениями эквивалентности. Для отношений эквивалентности укажите разбиение на классы эквивалентности:

- а) $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, b), (c, b), (c, c)\}$ на множестве $M = \{a, b, c\}$;
- б) $R = \{(b, a), (a, b), (b, c), (a, c), (c, b), (c, a)\}$ на множестве $M = \{a, b, c\}$;
- в) $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ на множестве $M = \{a, b, c\}$.