Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 6: разложение на простые сомножители

Определение. *Простым числом* называется целое число, большее 1, не имеющее никаких натуральных делителей кроме себя и 1.

Теорема (основная теорема арифметики)**.** *Любое целое положительное число может быть представлено в виде произведения (возможно, пустого) простых чисел, причём любые два таких представления различаются лишь порядком множителей.*

Следствие. *Для любого целого положительного n однозначно определена последовательность d целых неотрицательных чисел такая, что*

$$n = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot 7^{d_4} \cdot 11^{d_5} \cdot \ldots$$

Эту последовательность мы будем называть последовательностью степеней простых множителей n.

1) Пусть m и n — целые положительные числа, а c и d — последовательности степеней их простых множителей. Докажите, что $m \mid n$ тогда и только тогда, когда для всех i выполнено $c_i \leqslant d_i$.

2) Пусть n — целое положительное число, а d — последовательность степеней его простых множителей. Найдите количество положительных делителей числа n.

3) Пусть m и n — целые положительные числа, а c и d — последовательности степеней их простых множителей. Найдите последовательность степеней простых множителей числа mn.

4) Пусть p — простое число, a и b — целые. Докажите, что $p \mid ab$ тогда и только тогда, когда $p \mid a$ или $p \mid b$.

Определение. *Наибольшим общим делителем* целых чисел a и b, не равных 0 одновременно, называется наибольшее n такое, что $n \mid a$ и $n \mid b$. Обозначение: $\text{НОД}(a, b)$.

Определение. Числа a и b называются *взаимно простыми*, если $\text{НОД}(a, b) = 1$.

5) Пусть m и n — целые положительные числа, c и d — последовательности степеней их простых множителей. Найдите последовательность степеней простых множителей $\text{НОД}(m, n)$.

6) Докажите, что если n — общий делитель целых чисел a и b, то $n \mid \text{НОД}(a, b)$.

7) Докажите, что $\text{НОД}(ca, cb) = c \cdot \text{НОД}(a, b)$ при $c > 0$.

8) Докажите, что $\dfrac{a}{\text{НОД}(a,b)}$ и $\dfrac{b}{\text{НОД}(a,b)}$ взаимно просты.

Определение. *Наименьшим общим кратным* целых ненулевых чисел a и b называется наименьшее положительное n такое, что $a \mid n$ и $b \mid n$. Обозначение: $\text{НОК}(a, b)$.

9) Пусть m и n — целые положительные числа, c и d — последовательности степеней их простых множителей. Найдите последовательность степеней простых множителей $\text{НОК}(m, n)$.

10) Докажите, что если n — общее кратное целых чисел a и b, то $\text{НОК}(a, b) \mid n$.

11) Докажите, что если целые a и b не равны 0, то $ab = \text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b)$.

12) Докажите, что $\text{НОК}(ca, cb) = c \cdot \text{НОК}(a, b)$ при $c > 0$.

13) Докажите, что $\dfrac{\text{НОК}(a,b)}{a}$ и $\dfrac{\text{НОК}(a,b)}{b}$ взаимно просты.

14) а) Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = 1$ и $ab = m^2$, то существуют такие числа k и l, что $a = k^2$, $b = l^2$.

б) Найдите некоторые такие числа $n > m > 100$, что $1 + 2 + \ldots + n = m^2$.

в) Докажите, что число $m(m + 1)$ не является квадратом простого числа ни при каком целом $m > 1$.