Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 4: принцип крайнего

Замечание. Напоминаем: если некоторому свойству удовлетворяет хотя бы одно натуральное число, то среди всех натуральных чисел, удовлетворяющих этому свойству, есть наименьшее.

1) Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

2) Путешественник отправился из своего родного города A в самый удаленный от него город страны B; затем из B – в самый удаленный от него город C и т.д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется домой. (Расстояния между городами страны различны.)

3) В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона считать точками в пространстве.)

4) В клетках бесконечной шахматной доски стоят натуральные числа, причём каждое равно среднему арифметическому своих соседей по стороне. Докажите, что все числа равны друг другу.

5) Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

6) На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдется монета, которая касается не более трех других.

7) Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадет на сторону.

8) а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы модуль разности любых двух соседних был не меньше 50? б) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100.

9) В клетках квадрата 8×8 стоят целые числа, причём соседи по стороне отличаются меньше, чем на 5. Докажите, что в квадрате найдётся пара одинаковых чисел.

10) На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает за ближайшей к нему планетой. Докажите, что за некоторой планетой никто не наблюдает.

11) На квадратной шахматной доске $n \times n$ стоят ладьи, причём любую свободную клетку бьют хотя бы n ладей. Докажите, что общее число ладей не меньше $n^2/2$.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Занятие 4: принцип крайнего

Замечание. Напоминаем: если некоторому свойству удовлетворяет хотя бы одно натуральное число, то среди всех натуральных чисел, удовлетворяющих этому свойству, есть наименьшее.

1) Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

2) Путешественник отправился из своего родного города A в самый удаленный от него город страны B; затем из B – в самый удаленный от него город C и т.д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется домой. (Расстояния между городами страны различны.)

3) В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона считать точками в пространстве.)

4) В клетках бесконечной шахматной доски стоят натуральные числа, причём каждое равно среднему арифметическому своих соседей по стороне. Докажите, что все числа равны друг другу.

5) Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

6) На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдется монета, которая касается не более трех других.

7) Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадет на сторону.

8) а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы модуль разности любых двух соседних был не меньше 50? б) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100.

9) В клетках квадрата 8×8 стоят целые числа, причём соседи по стороне отличаются меньше, чем на 5. Докажите, что в квадрате найдётся пара одинаковых чисел.

10) На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает за ближайшей к нему планетой. Докажите, что за некоторой планетой никто не наблюдает.

11) На квадратной шахматной доске $n \times n$ стоят ладьи, причём любую свободную клетку бьют хотя бы n ладей. Докажите, что общее число ладей не меньше $n^2/2$.