Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Проверочная работа, вариант Ю

Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или на 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков, начиная с девяти.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Проверочная работа, вариант Я

В последовательности Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Доказать, что два делящихся на 7 числа в ней не могут стоять рядом.

Гимназия 1543, математический спецкурс, 8 В

Дополнительные задачи к занятию 1

11) Докажите, что количество различных слов из n букв $А$ и $Б$ равно 2^n.

12) На доске написано слово из n букв $А$ и $Б$. За один ход можно изменить одну букву (заменить $А$ на $Б$ и наоборот). Докажите, что за несколько ходов можно получить на доске (одно за другим) все 2^n слов, причем никакое слово не встретится дважды.

13) На сколько частей делят плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

Решение задач проверочной работы

Вариант Ю. Нам надо доказать, что из листа бумаги можно получить любое количество частей, большее 8. Предположим, что какое-то количество частей, большее 8, получить нельзя. Среди таких количеств рассмотрим наименьшее. Пусть оно равно m. Значит, на любое количество частей, большее 8 и меньшее m, мы разделить лист бумаги можем.

Если $m - 3 > 8$ (или, что равносильно, $m > 11$), то m частей мы можем получить, разделив лист сначала на $m - 3$ части, а затем разорвав одну из этих частей на 4.

Значит m равно 9, 10 или 11. Но любое из этих количеств мы получить можем:

$$9 = 1 + 3 + 5; \quad 10 = 1 + 3 + 3 + 3; \quad 11 = 1 + 5 + 5.$$

Противоречие с невозможностью рабить лист на m частей. $\square$

Вариант Я. Обозначим n-е число Фибоначчи символом F_n (нумерация начинается с 1). Предположим, что есть пара соседних чисел Фибоначчи, делящихся на 7. Рассмотрим самую первую такую пару (если более формально, пару соседних чисел Фибоначчи, кратных 7, в которой первое из чисел пары имеет наименьший порядковый номер). Пусть эта пара F_m, F_{m+1}.

Заметим, что $m > 1$, т.к. $F_1 = 1$, что не кратно 7. Значит, $m - 1$ — порядковый номер какого-то числа Фибоначчи. Заметим, что $F_{m-1} = F_{m+1} - F_m$, поэтому F_{m-1} делится на 7, что противоречит минимальности m. $\square$