Занятие 1: метод математической индукции

Принцип индукции в форме Пеано. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — последовательность утверждений. Если, во-первых, верно утверждение A_1, а во-вторых, мы можем доказать, что очередное утверждение A_{n+1} верно, считая известным, что предыдущее утверждение A_n верно, то можно утверждать, что все утверждения верны.

1) Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

2) Есть пирамидка с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

а) можно переложить все кольца на один из пустых стержней;

б) это можно сделать за $2^n - 1$ перекладываний;

в*) меньшим числом перекладываний обойтись невозможно.

3) Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трех клеток.

Более удобный принцип индукции. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — последовательность утверждений. Если мы можем доказать, что очередное утверждение A_n верно, считая известным, что все предыдущие утверждения верны, то можно утверждать, что все утверждения верны.

Принцип наименьшего числа. В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число.

4) Докажите, что любое натуральное число раскладывается в произведение простых сомножителей.

5) Докажите, что квадрат можно разбить на любое количество квадратов, большее 5.

6) Докажите, что монетами 3 и 5 тугриков можно заплатить любую сумму, начиная с 8 тугриков.

7) В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки 3 разных цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех 3 цветов.

8) Докажите, что если натуральное число n нечётно, то $n+1$ чётно (обратите внимание, что утверждение «если n чётно, то $n+1$ нечётно» очевидно в отличие от утверждения из задачи).

8а) Докажите, что если натуральное n нечётно, то $n-1$ чётно (индукция тут уже не нужна).

8б) А теперь докажите, что сумма двух любых натуральных нечётных чисел чётна (и тут индукция не требуется).

9) Найдите ошибку в следующем рассуждении:

Докажем, что любое натуральное число больше 2012. Предположим, что есть натуральное число, не превышающее 2012. Тогда пусть m — наименьшее такое число. Тогда $m - 1 > 2012$. Значит, $m > 2013 > 2012$. Противоречие с предположением. Значит, любое натуральное число больше 2012.

10) Найдите ошибку в следующем рассуждении:

Докажем, что в любом стаде коров все коровы одного цвета. Предположим, что есть стадо коров, в котором есть пара коров разного цвета. Рассмотрим такое стадо наименьшего возможного размера. Пусть в нём m коров. Заметим, что $m \geqslant 2$ (в неодноцветном стаде есть хотя бы 2 коровы). Выберем двух каких-то различных коров a и b. Остаток стада обозначим буквой X. Заметим, что корова a вместе с коровами X — это стадо из $(m-1)$ коровы. Поэтому оно одноцветное. Аналогично, стадо из b и X одноцветное. Рассмотрим любую корову из X. Она одного цвета с a и b. Значит, a и b одного цвета, а значит, всё стадо из m коров одноцветное, что противоречит предположению.

Дополнение

Мы склонны к обобщениям. Если мы идём вдоль поля и видим, что все растения на этом поле зелёного цвета, то в некоторый момент у нас может возникнуть подозрение: «А может быть, все растения зелёного цвета?» Конечно, это не так, но если человек не видел в своей жизни никаких растений, кроме зелёных, то он, наверное, будет сомневаться в существовании незелёных растений. Такой переход от утверждения «многие растения зелёные» к утверждению «все растения зелёные» в философии называется *индукцией*.

Индукция — это суждение об общих закономерностях на основе наблюдения каких-то частных случаев этих закономерностей. Противоположна индукции *дедукция* — переход от общих закономерностей к их частным случаям. Дедукция лежит в основе логики (зачастую под терминами «дедукция» и «логический переход» подразумевают одно и то же). Индукцией же можно из набора истинных предпосылок получить ложное следствие. Тем не менее, индукция бывает полезна при построении каких-либо теорий: самый простой (но далеко не всегда самый результативный) способ сделать так, чтобы теория не противоречила нашим наблюдениям — обобщить эти наблюдения и положить общее утверждение в основу теории.

Индукция, например, позволяет частично ответить на вопрос: «Что такое натуральное число?». К натуральным числам мы относим те числа, которые используются для счёта: 1, 2, 3, 4, 5, ... Если мы возьмём число 1543, то вычитая из него много раз единицу мы когда-нибудь получим все числа от 1 до 1542 (то есть все натуральные числа, меньшие 1543). Обобщим это утверждение: «Вычитая из любого натурального числа много раз единицу мы когда-нибудь (при условии неограниченности нашей жизни) получим все числа, меньшие его». Это утверждение пока ещё не математическое (никакого «когда-нибудь» в математике нет!), а философское, но ему уже можно придать математический смысл. Но для этого нам понадобится одно важное понятие.

Совокупность натуральных чисел, объединённых каким-то общим для них свойством, мы будем называть *подмножеством* множества натуральных чисел. Например, у нас есть подмножество чётных чисел (определённое свойством «быть чётным»), подмножество простых чисел (определённое свойством «быть простым»), и даже подмножество натуральных чисел, являющихся маленькими зелёными камнеедами. Подмножества бывают пустыми. Таково, скорее всего, последнее из приведённых в качестве примеров (если мы не считаем никакое из натуральных чисел маленьким зелёным камнеедом). В любом случае пустое подмножество можно определить свойством «не быть самим собой».

Так вот, исходя из нашего философского принципа о вычитании единицы, «докажем» следующее утверждение: «В любом непустом подмножестве натуральных чисел есть наименьшее число». Действительно, раз подмножество непусто, в нём есть хотя бы одно число. Возьмём это число и путём вычитания единицы получим из него все меньшие. Теперь для каждого из них проверим, находится ли оно в интересующем нас подмножестве. Среди тех, которые там находятся, выберем наименьшее. Оно и будет наименьшем в нашем подмножестве.

Конечно, это «доказательство» не является математическим. Скорее, это — набор слов, призванный убедить в том, что утверждение о существовании наименьшего числа не противоречит нашей интуиции. Зато теперь мы имеем принцип, полностью корректный с точки зрения математики. Он тоже носит название индукции, но не простой, а математической (и его применение является, как бы это странно ни звучало, разновидностью дедукции, а не индукции).

Принцип математической индукции. Любое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьшее число.

Можно сформулировать этот же принцип и в терминах свойств.

Принцип математической индукции. Если какому-то свойству удовлетворяет хотя бы одно натуральное число, то есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому свойству.

Этот принцип мы принимаем за аксиому. Теперь у нас появилось очень эффективное средство общения с множеством натуральных чисел.

Упражнение. Попытайтесь доказать принцип индукции в форме Пеано, исходя из принципа наименьшего числа. Подумайте, какие свойства множества натуральных чисел вам для этого потребовались.