

Первообразная и неопределенный интеграл

Дифференциал

Напомним, что **дифференциал** — линейная относительно Δx часть приращения функции.

$$df(x) = f'(x)dx \text{ или } f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

$$d(cu) = cdu; \quad d(uv) = vdu + u dv; \quad df(u(x)) = f'(u) \cdot du(x).$$

$$d(u + v) = du + dv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2};$$

256. Составьте таблицу дифференциалов элементарных функций.

257. Найдите дифференциалы: а) $d\left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; б) $d \log \sin x$; в) $d\frac{x^2 + x}{x - 1}$.

258. Найдите дифференциалы следующих функций:

$$\text{а) } y = \cos \sqrt{5x - \frac{\pi}{3}}; \quad \text{б) } y = e^{x^\alpha}; \quad \text{в) } y = x^2 \arccos x; \quad \text{г) } y = e^x \sin x.$$

Первообразная

Пример 1. Координата тела меняется по закону $s(t) = 5t^2 - 2t + 1$. Найдите скорость и ускорение тела через 3 секунды.

Пример 2. На покоящееся тело массой 5 кг начинает действовать сила 10 Н. На какое расстояние переместится тело за 3 секунды?

Какой из двух примеров более естественен?

Определение. **Первообразной** для данной функции $f(x)$, заданной на некотором промежутке, называется функция $F(x)$, заданная на том же промежутке, производная которой равна $f(x)$.

Таким образом, $F'(x) = f(x)$. Другая запись: $dF(x) = f(x)dx$.

Процесс отыскания первообразных называется **интегрированием** функций.

Термин происходит от лат. "integrare" «восстанавливать», далее от "integer" «нетронутый, целый», из in- «не-, без-» + tangere «трогать, касаться».

Пример 3. Проинтегрируйте функции: а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = \sin x$.

Основное свойство первообразной. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке, то для любого числа C функция $F(x) + C$ тоже является первообразной для $f(x)$ на этом промежутке. Других первообразных у $f(x)$ на этом промежутке нет.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют **неопределенным интегралом** этой функции и обозначают $\int f(x)dx$.

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а C пробегает множество всех действительных чисел.

$f(x)$ называют **подынтегральной функцией**, $f(x)dx$ — **подынтегральным выражением**, x — переменной интегрирования, а C — постоянной интегрирования.

Формулу $\int f(x)dx = F(x) + C$ можно записать также в виде

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \text{ или } \int dF(x) = F(x) + C.$$

Чтобы из бесконечного множества первообразных выделить одну, надо задать начальные условия.

Пример 4. Найдите первообразную $F_0(x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$, принимающую значение 1 при $x = 1$.

Пример 5. Функции $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) = (x + 5) \ln(7 - x)$ и $g(x) = (x - 2) \ln(x + 4)$ соответственно. Сравните $F(2)$ и $G(4)$, если $F(3) = G(3)$.

Арифметические свойства неопределенного интеграла

1) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. Интеграл суммы равен сумме интегралов, если они существуют.

Таблица основных интегралов

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; & \boxed{3} \int \cos x dx = \sin x + C; \\ \boxed{2} \int \sin x dx = -\cos x + C; & \boxed{5} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \\ \boxed{4} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; & \boxed{7} \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \\ \boxed{6} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C; & \boxed{9} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \\ \boxed{8} \int e^x dx = e^x + C; & \\ \boxed{10} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C; & \end{array}$$

Простейшие примеры интегрирования

$$\begin{array}{lll} 1) \int (x^4 - 6x^2 + 5x - 7) dx; & 2) \int \frac{(x^2 + 5x - 7) dx}{\sqrt{x}}; & 3) \int \left(x\sqrt[3]{x} - \frac{6}{x^2} \right) dx; \\ 4) \int (3 - x^2)^3 dx; & 5) \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx; & 6) \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx; \\ 7) \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx; & 8) \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}; & 9) \int (1 + \sin x + \cos x) dx; \\ 10) \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; & 11) \int (2^x + 3^x)^2 dx; & 12) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx. \\ \text{без номера)} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \end{array}$$

259. Наименьшее значение первообразной для функции $f(x) = x^2 + 10x + 28$ на отрезке $[-5; -2]$ равно -15. Найдите ее наибольшее значение на этом отрезке.

Домашнее задание

260. Найдите дифференциалы следующих функций:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } y = 5x^3 - \frac{2}{x^3}; & \text{в) } y = \sin 8x + \operatorname{tg} 2x; & \text{д) } y = (x^3 - 1)e^{x^3}; & \text{ж) } y = x^2 \cos x; \\ \text{б) } y = 6\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}; & \text{г) } y = \frac{x}{1+x^2}; & \text{е) } y = \log_2 \operatorname{arcsin} x; & \text{з) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}. \end{array}$$

261. Точки $K(3; 9)$ и $T(3; -1)$ лежат соответственно на графиках функций $y = F(x)$ и $y = G(x)$, являющихся первообразными для функции $f(x) = \sqrt{3x} + 3 \ln(x-2)$. Найдите расстояние между касательными к графикам, проведенными в этих точках.

262. При каких a уравнение $x^2 + 2x + |4x - 4| = ax + 3$ имеет ровно 2 решения?

Линейная замена переменной

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$.

$$\begin{array}{lll} 13) \int \frac{dx}{(x-2)^k}, k \neq 1; & 14) \int \frac{dx}{x+2}; & 15) \int \cos 3x dx; \\ 16) \int (2x-3)^{10} dx; & 17) \int \sqrt[3]{1-3x} dx; & 18) \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}; \\ 19) \int \cos 7x \cos 4x dx; & 20) \int \sin^2 3x dx; & 21) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}. \end{array}$$

Еще 4 табличных интеграла:

$$\begin{array}{ll} \boxed{11} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C; & \boxed{13} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \\ \boxed{12} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; & \boxed{14} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C. \end{array}$$

Проинтегрируйте, используя табличные интегралы:

$$22) \int \frac{dx}{2+3x^2}; \quad 23) \int \frac{dx}{2-3x^2}; \quad 24) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$