Теория множеств
8 класс "B"
18 января 2011 г.

Определение 1. Множества A и B называются *равномощными* (обозначение $|A| = |B|$), если существует взаимно-однозначное отображение $f : A \to B$

1. Докажите, что
a) $|A| = |A|$;
b) если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$;
c) если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

2. Докажите, что следующие множества равномощны
a) любые два отрезка;
b) интервал и полуокружность без концов;
c) интервал и прямая.

Определение 2. Множество называется *конечным*, если оно пусто или равномощно множеству $\{1, \ldots, n\}$ при некотором n.

Определение 3. Множество называется *бесконечным*, если оно не является конечным.

Определение 4. Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству всех натуральных чисел.

3. Докажите, что следующие множества счетны:
a) множество натуральных чисел, больших 1;
b) множество четных натуральных чисел;
c) множество целых чисел.

4. Докажите, что всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

5. Докажите, что у всякого бесконечного множества есть счетное подмножество.

6. Докажите, что объединение
a) конечного числа счетных множеств;
b) счетного числа конечных множеств;
c) счетного числа счетных множеств
счетно

7. Докажите, что следующие множества счетны:
a) множество рациональных чисел;
b) множество конечных последовательностей нулей и единиц;

c) множество всех русских "слов".

Определение 4. Множество называется *несчетным*, если оно бесконечно и не является счетным.

8.* Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно.

9. Множество A несчетно, а B счетно. Докажите, что $|A \backslash B| = |A|$.