Теория множеств
8 класс "В"
14 декабря 2011 г.

Множество — это одно из основных неопределяемых понятий математики. Неформальный смысл этого понятия — любой набор объектов, называемых его элементами. Набор может быть как конечным, так и бесконечным. Все элементы в любом множестве различны. Один из способов задать множество просто перечислить в фигурных скобках его элементы, например $\{2, 5\}$ *- множество состоящее из элементов 2 и 5.*
"Элемент x принадлежит множеству X" записывают как $x \in X$*. "Элемент x не принадлежит множеству X" записывают как* $x \notin X$*.*

1. Сколько элементов в множестве
a) $\{1\}$, $\{1, 2, 3\}$, {Вася}, $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$;
b) букв слова "математика";
c) имен учеников нашего класса?

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек
a) $(2x - y)(x + y) = 0$,
b) $(2x - y)^2 + (x + y)^2 = 0$.

Определение 1. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначение $A \subset B$), если каждый элемент A принадлежит B. Часто подмножество задают описанием отличительного свойства его элементов. Записывается это так: $\{x \in A | \text{свойство}\}$. Например, запись $\{x \in \mathbf{N} | (x - 3) \vdots 7\}$ задает подмножество множества натуральных чисел, дающих остаток 3 при делении на 7.

Определение 2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* (обозначение $\emptyset$).

3. Докажите, что для любых множеств A, B, C
a) $A \subset A$;
b) если $A \subset B$, и $B \subset C$, то $A \subset C$;
c) $\emptyset \subset A$.

4. Сколько различных подмножеств имеет множество из трех элементов?

5. Существует ли множество, у которого ровно
a) 0;
b) 5;
c) 16 подмножеств?

Определение 3. Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

6. Докажите, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

7. Докажите, что пустое множество единственно.

Определение 4. *Объединение* множеств A и B (обозначение $A \cup B$) состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств, т.е. $x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ или $x \in B$.

Определение 5. *Пересечение* множеств A и B (обозначение $A \cap B$) состоит из элементов, принадлежащих каждому из этих множеств, т.е. $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \in B$.
Определение 6. *Разность* множеств A и B (обозначение $A \backslash B$) состоит из элементов, принадлежащих первому из этих множеств и не принадлежащих второму, т.е. $x \in A \backslash B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \notin B$.
8. Докажите тождества
a) $A \cup B = B \cup A$;
b) $A \cap B = B \cap A$;
c) $A \cup A = A \cap A = A$;
d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
f) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
g) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
9. Пусть $A = \{2, 3, 5, 17\}$, $B = \{3, 4, 5, 8, 13\}$, $C = \{4, 17, 28, 52\}$, $D = \{6, 28\}$. Найдите
a) $(A \backslash B) \cup C$;
b) $(A \cup D) \cap B$;
c) $D \backslash (C \cup A)$.
10. На плоскости дан равносторонний треугольник ABC. Пусть
$X = \{M |$ треугольник ABM равнобедренный$\}$,
$Y = \{M |$ треугольник ACM равнобедренный$\}$,
$Z = \{M |$ треугольник BCM равнобедренный$\}$.
Изобразите на плоскости множества
a) X, Y,
b) $X \cup Y$, $Y \cap Z$, $Z \backslash X$,
c) $X \cap Y \cap Z$,
d) $X \cap (Y \cup Z)$, $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.
11. Всегда ли верны следующие равенства
a) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$;
b) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$;
c) $A \cup (B \backslash A) = B$.
Определение 7. *Симметрическая разность* множеств A и B (обозначение $A \Delta B$) состоит из элементов, принадлежащих ровно одному из этих множеств.
12. Выразите $A \Delta B$ через определенные ранее операции.
13. Упростите выражение $(A \Delta B) \Delta A$.
14.
a) Докажите равенство $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
b) Опишите указанное в предыдущем пункте множество.
Во многих задачах все рассматриваемые множества являются подмножествами одного *универсального* множества U. В этом случае разность $U \backslash A$ называется *дополнением* множества A (обозначение $\overline{A}$).
15. Докажите **законы де Моргана**: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.