Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 1

1.Определение и свойства делимости.
2.Докажите, что есть число вида $11\dots1$, которое делится на 2011.

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 2

1.Деление с остатком
2.$\frac{[a,b,c]}{(a,b,c)} \cdot (a,b) \cdot (b,c) \cdot (a,c) = abc$

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 3

1.Сравнения по модулю. Определение и основные свойства.
2.Решите уравнение $153x - 34y = 51$.

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 4

1.Определение и свойства НОД.
2.Докажите, что при $n \in \mathbf{N}$ $4^n + 15n - 1 \,\vdots\, 9$

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 5

1.Алгоритм Евклида
2.Докажите, что если x и y — целые числа, и $x^2 - 7xy + y^2$ кратно 3, то $x^2 - 7xy + y^2$ кратно 9.

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 6

1.Обратный алгоритм Евклида
2.Докажите, что число 20102011 нельзя представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 7

1.Если a и b взаимно просты, то существуют целые x и y такие, что $ax + by = 1$
2.У каких натуральных чисел количество делителей нечетно?

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 8

1.Если $(a, b) = 1$ и $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.
2.Найдите все числа p, для которых p, $p + 2$, $p + 10$ — простые.

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 9

1.Основная теорема арифметики
2.Коля берёт прямоугольный бумажный лист $m \times n$ см, отрезает от него квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, и кидает его на пол. От оставшегося прямоугольника он снова отрезает квадрат, кидает на пол и так далее, до тех пор, пока это возможно. Что же останется в руках у Коли, когда он закончит свою деятельность и приступит к уборке мусора?

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 10

1.Бесконечность множества простых чисел.
2.Даны углы $32°$ и $25°$. Построить угол $1°$.

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 11

1.Определение НОК. $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.
2.При каких k число $(k-1)!$ делится на k?

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 12

1.Малая теорема Ферма.
2.Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 2011$

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 13

1.Теорема Вильсона.
2.Докажите, что если $3a - 1$ делится на 7, то $2a - 3$ делится на 7.

Зачет по теме "Делимость"
8 класс "В"
Билет 14

1.Китайская теорема об остатках.
2.Найдите НОД всех 10-значных чисел состоящих из различных цифр.

Задачи на 4

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 5 остаток 3, при делении на 6 остаток 2 и при делении на 7 остаток 4.

2. Докажите, что при нечетных m и n число $1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n$ делится на m.

3. Про семь чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое число делится на 5.

4. Докажите, что существуют 1000 идущих подряд составных чисел.

5. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно делящееся на n).

6. Докажите, что любого n есть число вида $11\ldots10\ldots0$ делящееся на n.

7. Сколько нулей на конце у числа 1543!

8. Сколько существует остатков, обратимых по модулю 30?

9. Сколько решений имеет сравнение $5x \equiv 20 \pmod{30}$?

10. Докажите, что $n^{m+2}+(n+1)^{2m+1}$ делится на n^2+n+1.

11. Известно, что $a^2+b^2=c^2$. Докажите, что ab делится на 12.

12. Докажите признак делимости на 9.

13. Докажите, что $(a+1)^n-an-1$ делится на a^2.

14. Докажите, что, если $(n,30)=1$, то $n^4 \equiv 1 \pmod{30}$.

Задачи на 5

1. Докажите, что при $n \in \mathbf{N}$ $11^{10n} - 1 \vdots 100$.
2. Докажите, что для любых 52 целых чисел всегда можно выбрать 2 числа, сумма или разность которых делится на 100.
3. Сколько различных натуральных делителей у числа $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, где $p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа?
4. Найдите сумму натуральных делителей числа $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, где $p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа.
5. Найдите наименьшее натуральное число половина которого точный квадрат, треть — точный куб, пятая часть — пятая степень.
6. Решите в натуральных числах уравнение $2n^3 + n^2 = 3^k$.
7. Докажите, что квадрат натурального числа не может заканчиваться на две нечетные цифры.
8. Из чисел $1, 2, \dots, 2000$ произвольным образом выбрали 1001 число. Докажите, что среди выбранных чисел всегда найдутся два, одно из которых делится на другое.
9. Докажите, что число вида $100\dots09$ не может быть квадратом натурального числа.
10. Найдите произведение натуральных делителей числа $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, где $p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа.
11. Обозначим через $n(a)$ количество натуральных делителей числа a. Докажите, что, если $(a, b) = 1$, то $n(ab) = n(a)n(b)$.
12. Обозначим через $s(a)$ сумму натуральных делителей числа a. Докажите, что, если $(a, b) = 1$, то $s(ab) = s(a)s(b)$.
13. Обозначим через $\phi(a)$ количество натуральных чисел, меньших числа a и взаимно простых с ним. Докажите, что, если $(a, b) = 1$, то $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.
14. Известно, что $n^{1543} - 1 \vdots 2011$. Докажите, что $n - 1 \vdots 2011$.