Пирамида (повторение)

Теорема 1. *Если в пирамиде равны длины всех боковых ребер или все ее боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, то около основания можно описать окружность, а вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.*

Теорема 2. *Если все двугранные углы при основании пирамиды равны или ее вершина равноудалена от сторон основания, то в основание можно вписать окружность, а вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.*

Теорема 2'. *Если плоскости всех граней пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, или ее вершина равноудалена от прямых, содержащих стороны основания, то вершина пирамиды проектируется в центр либо вписанной, либо одной из вневписанных окружностей основания.*

Теорема 3. *Если в трехгранном угле два плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла принадлежит прямой, содержащей биссектрису этого угла.*

Наклонная призма (повторение)

Теорема. *Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения на длину бокового ребра*: $\boxed{S_{бок} = P_{\perp} \cdot b}$.

1. (устно) В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ двугранные углы с ребрами CC_1 и BB_1 соответственно равны 45° и 30°. Расстояние от ребра AA_1 до диагонали B_1C грани CC_1B_1B равно 1. Площадь грани CC_1B_1B равна $4(1+\sqrt{3})$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
2. Основанием наклонной призмы служит прямоугольник. Две смежные боковые грани составляют с плоскостью основания углы α и β. Найдите высоту призмы, если ее боковое ребро равно c.

Домашнее задание

3. Основанием пирамиды SABC служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B и углом A, равным α. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите угол между плоскостями SAC и SBC.
4. Основанием треугольной пирамиды MABC служит равнобедренный треугольник ABC, у которого AB = AC, BC = 24, а высота AK = 5. Высоты боковых граней, проведенные из вершины M, равны между собой. Высота пирамиды равна 12. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
5. Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной 8см, боковое ребро равно 8,5см, а одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего основания. Найдите боковую поверхность призмы.
6. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно l. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной b, а прямая, проходящая через вершину B_1 и центр основания ABC, перпендикулярна основаниям. Найдите площадь сечения, проходящего через ребро BC и середину ребра AA_1.

Вспомогательный многогранник

I. *Прямые и плоскости не должны висеть в воздухе!*

7. Дан двугранный угол величиной α. В плоскости одной из его граней проведена прямая, перпендикулярная ребру этого двугранного угла, а в плоскости другой его грани – прямая, образующая угол β с ребром. Найдите угол между этими прямыми.
8. Угол между скрещивающимися прямыми равен 60°. Точка M лежит на одной прямой, точка N – на другой, причем расстояния от этих точек до общего перпендикуляра данных прямых одинаковы и равны расстоянию между этими прямыми. Найдите угол между общим перпендикуляром и прямой MN.
9. Угол между двумя гранями трехгранного угла прямой, а величина каждого плоского угла этих граней равна α. Найдите величину плоского угла третьей грани.

II *Укладывание тетраэдра в угол коробки.*

10. В тетраэдре ABCD все плоские углы при вершине A прямые. Точка O удалена от всех вершин тетраэдра на одинаковое расстояние. а) Докажите, что это расстояние равно длине отрезка, соединяющего середины скрещивающихся ребер данного тетраэдра; б) Выразите его через длины ребер AB, AC и AD.

III *Укладывание тетраэдра в коробку по диагонали.*

11. Косинус угла между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $\sqrt{35}/10$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD. Найдите угол ACB, если известно, что $AB = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, $EF = \sqrt{13}$.
12. Три отрезка, не лежащих в одной плоскости, пересекаются в точке O, делящей каждый из них пополам. Сколько существует тетраэдров, в которых эти отрезки соединяют середины противоположных ребер?

IV *Другие вспомогательные многогранники.*

13. Из одной вершины прямоугольного параллелепипеда проведены диагонали всех граней, проходящих через эту вершину. Докажите, что сумма трех углов, образованных этими диагоналями, равна 180°.
14. Докажите, что сумма углов, которые образует диагональ прямоугольного параллелепипеда с выходящими из той же вершины ребрами, меньше 180°.
15. Докажите, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

Равногранный тетраэдр.

Определение. *Тетраэдр называется* ***равногранным****, если все его грани – равные треугольники (или, что то же самое, противоположные ребра попарно равны).*

16. Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда:
   а) он укладывается по диагонали в прямоугольную коробку;
   б) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, перпендикулярны;
   в) все его грани равновелики (Указание. Спроектируйте тетраэдр на плоскость, параллельную двум его скрещивающимся ребрам.)
   г) суммы плоских углов при каких-либо трех вершинах тетраэдра равны 180°.

Домашнее задание.

17. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол которой равен 45° .Найдите угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в указанной грани.
18. Вершины B и C треугольника ABC лежат на разных гранях двугранного угла величины 45° с ребром l. Сторона AC перпендикулярна одной из граней и пересекает ее в своей середине. Проекция отрезка BC на другую грань параллельна ребру l и по длине равна расстоянию от точки C до l. Найдите углы треугольника ABC. Указание: поместите конструкцию в куб.
19. Дан треугольник LMN, в котором $\angle LNM = 90°$, $\angle MLN = 30°$. Через точку L проведена прямая l, перпендикулярная отрезку LN и не лежащая в плоскости LMN. На прямой l взята точка F так, что LF = MN. Двугранный угол, гранями которого являются треугольники LMN и LNF, равен 60°. Найдите угол между прямыми LM и NF. Указание: разместите отрезок LN на ребре куба.
20. Докажите, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов расстояний между серединами его противоположных ребер.