

1. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны a и b и пересекаются под углом 60° . Найдите диагонали четырехугольника.
2. Через основание биссектрисы AD равнобедренного треугольника ABC с вершиной B проведен перпендикуляр к этой биссектрисе, пересекающий прямую AC в точке E . Найдите отрезок AE , если известно, что $CD = 4$.
3. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6 . Отрезок, соединяющий середины оснований, равен $4,5$. Найдите площадь трапеции.
4. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $CP = 5$, $PE = 2$.

Домашнее задание

5. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30° .
6. Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата, если катеты треугольника равны a и b .
7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM . Найдите площадь треугольника ABC , если $LM = a$, $CM = b$.
8. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD .
9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD , равна 1 . Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD .

11-В класс. Планиметрия - 2 10.02. 2012г.

10. а) Две стороны треугольника равны 3 и 6 , а угол между ними равен 60° . Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины этого угла.
б) Две стороны треугольника равны a и b , а угол между ними равен γ . Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины этого угла.
11. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?
12. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $CP = 5$, $PE = 2$.
13. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.
14. Длины сторон треугольника различны и образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что прямая, проходящая через центр вписанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, параллельна одной из его сторон.
15. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O , $\angle BOA = \angle COD = 60^\circ$. Перпендикуляр BK , опущенный из вершины B на сторону AD , равен 6 ; BC в 3 раза меньше AD . Найдите площадь треугольника COD .
16. Выразите расстояние между центрами: а) вписанной и описанной; б) невписанной и описанной окружностей треугольника через их радиусы.

Домашнее задание

17. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10 , а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12 .
18. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Найдите высоту треугольника ABC , опущенную из точки A , если $AB = 5$, $AC = 2$, а точки A , D , E , C лежат на одной окружности.
19. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AE и CD . Найдите длины отрезков CD , CE , DE и расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC , если $AB = 2$, $BC = 4$, $\angle ACB = \arccos 11/16$.
20. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны отношения $AB : DC = 1 : 2$ и $BD : AC = 2 : 3$. Найдите $DA : BC$.

21. Четырехугольник ABCD вписан в окружность с центром O, $\angle BOA = \angle COD = 60^\circ$. Перпендикуляр BK, опущенный из вершины B на сторону AD, равен 6; $AD = 3 \cdot BC$. Найдите площадь треугольника COD.
22. Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 . Найдите углы треугольника O_1AO_2 , если отношение радиусов окружностей равно $\sqrt{3}$.
23. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B соответственно. Найдите угол AO_2B , если известно, что $\operatorname{tg} \angle ABC = 1/2$.
24. Окружности различных радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B, а вторая прямая – в точках C и D соответственно. Докажите, что ABCD – описанная трапеция и найдите ее высоту.
25. Периметр треугольника ABC равен 8. В треугольник вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB. Отрезок этой касательной, заключенный между сторонами AC и CB, равен 1. Найдите сторону AB.
26. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полуокружности по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a .

Домашнее задание

27. К окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6, 10, 12, проведена касательная, пересекающая две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.
28. Центр описанной окружности треугольника симметричен центру его вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.
29. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC : CA : AB$.
30. В параллелограмме ABCD известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и угол $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.
31. Через точку A окружности радиуса 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислите радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB = 16$.

32. Вне равностороннего треугольника ABC, но внутри угла BAC взята точка M, причем угол $\angle CMA = 30^\circ$, а $\angle BMA = \alpha$. Найдите $\angle ABM$.
33. Периметр треугольника ABC равен 8. В треугольник вписана окружность, и к ней проведена касательная, параллельная стороне AB. Отрезок этой касательной, заключенный между сторонами AC и CB, равен 1. Найдите сторону AB.
34. В треугольнике ABC $AB = 14$, $BC = 6$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 9$. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите EF.
35. Окружности различных радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касает-ся этих окружностей в различных точках A и B, а вторая прямая – в точках C и D соответственно. Докажите, что ABCD – описанная трапеция и найдите ее высоту.
36. Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции ABCD равны p . Боковая сторона BC равна q . Найдите диагональ AC.
37. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полуокружности по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a .

Домашнее задание

38. Около четырехугольника ABCD можно описать окружность. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AD = 2$. Найдите AC.
39. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма ABCD, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.
40. В треугольнике ABC известно, что $AB = 18$, $BC = 16$, $\cos \angle B = 4/9$, AH – высота. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону AB в точке M. Найдите HM.
41. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки C, лежащей на окружности, до касательных, равны a и b . Найдите расстояние от точки C до прямой AB, где A и B – точки касания.
42. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает сторону AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что $MN = BC$ и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Найдите углы треугольника ABC.

43. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.
44. В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда $AB = 8$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC:BC=1:2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.
45. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S.
46. Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции ABCD равны p. Боковая сторона BC равна q. Найдите диагональ AC.
47. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки C, лежащей на окружности, до касательных, равны a и b. Найдите расстояние от точки C до прямой AB, где A и B – точки касания.

Домашнее задание

48. В треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1 . O – центр описанной окружности. Докажите, что отрезки AO и B_1C_1 перпендикулярны.
49. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B – медиана BP. Известно, что угол APB равен углу BMA. Косинус угла ACB равен 0,8 и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.
50. Площадь трапеции ABCD равна 90. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника OMPN, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.
51. В треугольнике ABC известно, что $AB=2$, $AC=5$, $BC=6$. Найдите расстояние от вершин B до ортоцентра.
52. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полуокружности по одну сторону от AC. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a.

53. В параллелограмме ABCD биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 5$. Найдите BC, если $AB = 3$.
54. Точки M, K и N лежат на сторонах соответственно AB, BC и AC треугольника ABC, причем AMKN – параллелограмм, площадь которого составляет $4/9$ площади треугольника ABC. Найдите диагональ MN параллелограмма, если известно, что $AB = 21$, $AC = 12$ и $\angle C = 120^\circ$.
55. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки C, лежащей на окружности, до касательных, равны a и b. Найдите расстояние от точки C до прямой AB, где A и B – точки касания.
56. Расстояния от точки M, расположенной внутри угла, равного 60° , до сторон угла равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол, и проходящей через точку M.
57. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C, CN – его высота, BD – медиана. Прямые DN и BC пересекаются в точке E. Окружность, проходящая через точки D и N, касается прямой BC в точке M. Найдите CM, если известно, что $DE = 9$, $DN = 7$ и точка E лежит на луче BC.

Домашнее задание

58. Две стороны треугольника равны 5 и 6, косинус угла между ними равен $3/5$. Найдите сторону квадрата, все вершины которого расположены на сторонах треугольника.
59. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 и 50. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.
60. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 63, точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 20: 9, считая от основания. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.
61. Расстояние между параллельными прямыми равно $48/5$. На одной из них лежит точка C, на другой – точки A и B, причем треугольник ABC равнобедренный. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен $8/3$. Найдите AB.

62. Через вершину В правильного шестиугольника ABCDEF проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке К. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 1 : 2. Найдите отношение СК : KF.
63. Расстояния от точки М, расположенной внутри угла, равного 60° , до сторон угла равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол, и проходящей через точку М.

Угол между плоскостями

Способы нахождения угла между плоскостями

1. Заменить одну из плоскостей на параллельную ей.
 2. Подумать, не перпендикулярны ли данные плоскости.
 3. Найти угол между перпендикулярами к этим плоскостям (или между перпендикуляром к одной из плоскостей и другой плоскостью).
 4. Воспользоваться теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника.
 5. Построить линейный угол двугранного угла и вычислить его.
1. Найдите угол между гранями правильного тетраэдра.
 2. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. Все ее боковые грани – квадраты. Найдите углы между следующими плоскостями: а) A_1B_1C и ABC ; б) A_1MC и A_1AC , где М – середина ребра BB_1 ; в) A_1MC и ABC ; г) A_1MC и B_1BC .
 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями: а) AB_1C_1 и CB_1A_1 ; б) AB_1D_1 и A_1C_1D .
 4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки Е, F, М – середины ребер AA_1 , AB и CC_1 соответственно. Найдите угол между плоскостями EFD и A_1D_1M .
 5. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб. Высота пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания, и она равна половине диагонали AC . На ребре MC задана точка Р – середина этого ребра. Найдите углы между плоскостью BDP и следующими плоскостями: а) BDM ; б) MCD ; в) MQR , где точки Q и R – середины ребер соответственно AB и AD .
 6. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны ее основания. На ребрах AC и CC_1 призмы заданы их середины – соответственно точки М и Р. Найдите углы между плоскостью BMP и следующими плоскостями: а) ACC_1 ; б) A_1BM ; в) ABB_1 .