

**Многогранники и шары-1****Описанный шар**

138. Найдите геометрическое место центров сфер, содержащих вершины данного а) треугольника; б) многоугольника; в) тетраэдра.
139. Докажите, что если около многогранника можно описать шар, то этот шар единственный.
140. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования описанного шара у пирамиды.
141. Может ли центр описанного шара находиться вне пирамиды?
142. Основание пирамиды – квадрат со стороной  $a$ . Высота пирамиды проходит через середину одной из сторон основания и равна  $a\sqrt{3}/2$ . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.
143. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Точка  $E_1$  – середина ребра  $B_1 C_1$ . Найдите радиус сферы, проходящей через точки  $E_1$ ,  $C$ ,  $A_1$  и  $C_1$ .
144. Найдите радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, если известна длина стороны основания  $a$  и:
- угол  $\alpha$  наклона бокового ребра к основанию;
  - двугранный угол  $\beta$  при основании;
  - плоский угол  $\gamma$  при вершине;
  - двугранный угол  $\delta$  при боковом ребре.
145. Докажите, что около призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда призма прямая, а в ее основании лежит вписанный многоугольник. Центром описанного шара является середина отрезка, соединяющего центры кругов, описанных около оснований.
146. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования шара, описанного около усеченной пирамиды.
147. Стороны оснований правильной  $n$ -угольной усеченной пирамиды равны  $a$  и  $b$ . Угол наклона бокового ребра к плоскости оснований равен  $\alpha$ . Найдите радиус описанного шара.

**Домашнее задание**

148. В сферу радиуса  $R$  вписана правильная треугольная призма со стороной основания  $a$ . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр сферы и сторону основания призмы.
149. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной  $a$ . Высота пирамиды проходит через середину одной из сторон основания и равна  $3a/2$ . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.
150. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Точки  $M$  и  $K$  – середины ребер  $AB$  и  $CD$  соответственно. Найдите радиус сферы, проходящей через точки  $M$ ,  $K$ ,  $A_1$  и  $C_1$ .
151. Дан правильный тетраэдр  $PABC$  с ребром  $a$ . Через точки  $S$ ,  $E$ ,  $M$ ,  $P$ , где  $E$  – середина  $AB$ , а  $M$  – середина  $AC$ , проведена сфера. Найдите ее радиус.

**Многогранники и шары-2****Вписанный шар**

138. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от граней данного  
а) двугранного; б) трехгранного; в) многогранного угла; г) от двух пересекающихся плоскостей.
139. Во всякую ли пирамиду можно вписать шар: А в призму?
140. Докажите, что во всякий тетраэдр можно вписать шар, и притом единственный.
141. Докажите, что в правильную пирамиду можно вписать шар, и притом единственный.
142. Пусть  $V$  – объем, а  $S$  – площадь полной поверхности многогранника, описанного около шара радиуса  $r$ . Докажите, что  $r = 3V/S$ .
143. Две грани треугольной пирамиды – равносторонние треугольники со стороной  $a$ . Две другие грани – равнобедренные прямоугольные треугольники. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.
144. Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, если известна длина стороны основания  $a$  и:  
а) угол  $\alpha$  наклона бокового ребра к основанию;  
б) двугранный угол  $\beta$  при основании;  
в) плоский угол  $\gamma$  при вершине;  
г) двугранный угол  $\delta$  при боковом ребре.
145. Докажите, что в правильную усеченную пирамиду можно вписать шар тогда и только тогда, когда ее апофема равна сумме радиусов кругов, вписанных в основания.

**Вневписанный шар**

146. Докажите, что радиус шара, вневписанного в многогранник и касающегося грани площади  $S_0$ , равен  $r_0 = \frac{3V}{S - 2S_0}$ .
147. Докажите, что существует 5, 6, 7, или 8 шаров, касающихся всех плоскостей граней данного тетраэдра.

**Домашнее задание**

148. Высота  $PO$  правильной четырехугольной пирамиды  $PABCD$  равна 4, а сторона основания  $ABCD$  равна 6. Точки  $M$  и  $K$  – середины отрезков  $AB$  и  $CD$ . Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду  $PMKC$ .
149. Вычислите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду со стороной основания  $a$  и боковым ребром  $b$ .
150. Через вершину нижнего основания единичного куба проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара. Эта плоскость отсекает от верхнего основания треугольник площади  $S$ . Найдите площадь сечения куба этой плоскостью. *Указание.* Отметьте на этом кубе как можно больше равных отрезков касательных к шару.