Метод координат.

Простейшие координатные формулы:

- Пусть даны точки A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2). Тогда $\overrightarrow{AB}$ = ($x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_1 - z_2$).
- Пусть $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$, $k\vec{a} = (kx_1, ky_1, kz_1)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
- Длина вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ вычисляется по формуле $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Расстояние между точками A(x_1, y_1, z_1) и B(x_2, y_2, z_2): $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- Координаты середины отрезка: если A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), M – середина отрезка AB, то $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.
- Угол между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$: $\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Какие из перечисленных формул верны только в декартовой системе координат, а какие – в произвольной аффинной?

Уравнения прямой

- Параметрические: $\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$, где точка ($x_1$, y_1, z_1) принадлежит прямой, (a, b, c) – направляющий вектор;
- Канонические: $\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$;
- Уравнения прямой, проходящей через две данные точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$;

97. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (0; 3; 0) и параллельной оси аппликат. Затем напишите формальные канонические уравнения. Как здесь следует понимать деление на 0?
98. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных каноническими уравнениями, а также формулу косинуса угла между ними.
99. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим систему координат с началом в точке B такую, что A(1, 0, 0), C(0, 1, 0) и B_1(0, 0, 1). Напишите в этой системе координат канонические уравнения прямых: а) A_1D; б) MK, где M- центр грани ABCD, а точка K делит ребро CC_1 в отношении $CK : KC_1 = 2 : 1$. в) Найдите угол между прямыми A_1D и MK.

Домашнее задание

100. Докажите, что если точка M делит отрезок AB в отношении AM : MB = λ, причем A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right)$

101. Даны точки A(5, -7, -2), B(1, -1, 0), C(-4, 9, -5), D(-2, 4, 1). Найдите:
   а) координаты вектора AB,
   б) длину отрезка AB;
   в) координаты точки M – середины отрезка AB;
   г) координаты точки T, делящей отрезок BC в отношении BT : TC = 3 : 2;
   д) угол между прямыми AB и CD;
   е) канонические уравнения прямой BC;
   ж) координаты центра масс тетраэдра ABCD.

Уравнение плоскости

- $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, где (a, b, c) – вектор нормали, (x_1, y_1, z_1) – точка плоскости;
- $\boxed{ax+by+cz+d=0}$ – общее уравнение;
- $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$ – уравнение плоскости «в отрезках».

Уравнения прямой пересечения данных плоскостей: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

Расстояние от точки M(x_0, y_0, z_0) до плоскости $ax+by+cz+d=0$ равно $\boxed{\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

Задачки

102. Запишите формулу косинуса угла между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

103. Запишите формулу синуса угла между прямой $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$.

104. Запишите условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, заданных общими уравнениями, а также формулу косинуса угла между ними.

105. Как расположена плоскость а) $by+cz+d=0$; б) $ax+d=0$?

106. Определите, лежат ли в одной плоскости точки A (1, 0, -2), B (-3, 4, 2), C (0, 1, 3) и D (2, -1, 1).

107. Найдите координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ и плоскости $2x+y+z-9=0$.

108. Напишите канонические уравнения прямой пересечения плоскостей $x-y+2z+4=0$ и $2x-y-z-3=0$.

109. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку (3, 7, 2) и параллельной прямым $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{2}$ и $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}$.

110. Плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ делит пространство на два полупространства. Какими соотношениями задаются эти полупространства?

111. Определите, пересекает ли плоскость $3x-5y+2z-1=0$ отрезок AB, если A(2, –1, 5), B(3, 0, –6).

112. Напишите уравнение биссекторной плоскости пары вертикальных двугранных углов, образованных плоскостями $8x+4y+z+1=0$ и $2x-2y+z+1=0$, если известно, что точка (1, 1, 1) лежит в одном из углов этой пары.

$\boxed{\text{Уравнение сферы: } (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.}$

113. Докажите, что пересечением а) сферы и плоскости; б) двух сфер является окружность, точка или пустое множество.

114. Составьте уравнение сферы, проходящей через точку (0, 1, 0) и касающейся плоскостей $x+y=0$, $x-y=0$ и $x+y+4z=0$.

115. Докажите, что уравнение плоскости, касающейся сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ в точке (x_1, y_1, z_1), задается уравнением $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)+(z_1-c)(z-c)=R^2$.

116. Какое множество точек задает уравнение: а) $x^2+y^2=25$; б) $x^2+y^2=4z^2$; в) $|x|+|y|+|z|=1$?

Домашнее задание

117. Точки A(1, 0, 3), и B(-1, 2, 1) – вершины тетраэдра ABCD, точка K(-1, 5, 2) – середина ребра BC, а точка M(0, 1, 4) – точка пересечения медиан грани BCD. а) Найдите угол между прямыми AB и CD; б) Составьте уравнения плоскости ACD; в) Найдите расстояние от точки B до плоскости ACD; г) Найдите угол между прямой BD и плоскостью ACD.

118. Найдите:
а) координаты проекции точки A(3, -1, 1) на плоскость x + 2y + 2z + 6 = 0;
б) координаты точки, симметричной точке A относительно данной плоскости.

119. Докажите, что сфера $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ и плоскость $2x + y - 2z + 3 = 0$ касаются и найдите координаты точки касания.

120. Докажите, что сфера $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ и плоскость $4x + 2y + 2z + 3 = 0$ пересекаются и укажите координаты центра и радиус окружности пересечения.

121. Докажите, что уравнения $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z + 4 = 0$ и
$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + 1 = 0$ задают сферы, причем пересекающиеся, и укажите координаты центра и радиус окружности пересечения.

122. Даны точки A(5, -7, -2), B(1, -1, 0), C(-4, 9, -5), D(-2, 4, 1). Найдите:
а) Уравнение сферы с диаметром AB,
б) Уравнения плоскостей, касательных к сфере с диаметром AB, и параллельных плоскости xOz.

Задачи на применение метода координат

123. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром *a* найдите а); расстояние от центра грани AA_1D_1D до плоскости BC_1D; б) угол между прямой BD_1 и плоскостью BC_1D; в) угол между плоскостями AA_1D_1 и BC_1D.

124. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб ABCD с углом при вершине A, равным 60°. Все ребра призмы имеют длину *a*. Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость DA_1C_1, а точка L – ортогональной проекцией точки K на плоскость DD_1C_1. Найдите объем пирамиды DCLK.

125. На ребрах A_1D_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки K и M так, что плоскость KDM касается вписанного в куб шара. Докажите, что а) сумма $KD_1 + D_1M$; б) величина двугранного угла при ребре B_1D тетраэдра B_1DKM не зависят от выбора точек K и M.

126. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус сферы, проходящей через вершину A, середины ребер DC и BB_1 и центр грани $A_1B_1C_1D_1$.

127. В правильной пирамиде SABCD (S – вершина) величина двугранного угла при основании равна 30°. Точки M, N, P, Q – середины ребер AB, BC, CD и DA соответственно. Точка E лежит на ребре AB, точка F – на ребре CS. Известно, что углы, образованные прямой EF с плоскостями SMP и SBA, а также прямой DF с плоскостью SNQ, равны. Найдите величину угла α этих углов.

128. *Сфера Аполлония*. Даны две точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Докажите, что геометрическим местом таких точек M, что AM : BM = *k*, является сфера с центром на прямой AB.

129. В правильной треугольной пирамиде SABC длина ребра основания ABC равна *a*, а угол между апофемой грани ASC и гранью BSC равен 45°. Найдите длину высоты пирамиды.

130. Дан куб с ребром 1. Найдите геометрическое место точек пространства, сумма квадратов расстояний от которых до вершин куба равна 8.