Вспомогательный объем

80. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри правильного тетраэдра до его граней не зависит от выбора точки.

81. Докажите ***теорему синусов для тетраэдра***: *произведение длин двух противоположных ребер тетраэдра, деленное на произведение синусов двугранных углов при этих ребрах, для данного тетраэдра постоянно*.

82. Площади граней ABC и ADC тетраэдра ABCD равны P и Q, двугранный угол между ними равен α. Найдите площадь сечения тетраэдра биссекторной плоскостью этого угла.

Для вычисления расстояний и углов часто бывает полезно вычислить объем тетраэдра двумя способами и приравнять результаты. При этом используются следующие формулы:

$$V = 1/3\ Sh, \qquad V = 1/6\ AB\cdot AC\cdot AD\cdot \sin\beta \sin\gamma \sin D, \qquad V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}.$$

83. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися медианами граней правильного тетраэдра с ребром a (два случая).

84. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

85. Объем тетраэдра ABCD равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M, причем DM : CM = 2 : 3. Вычислите площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

86. В основании пирамиды SABCD лежит трапеция ABCD с основаниями BC и AD, причем BC = 2AD. На ребрах SA и SB взяты точки K и L так, что 2SK = KA, 3SL = LB. В каком отношении плоскость KLC делит ребро SD?

87. На ребрах AB, BD и DC пирамиды ABCD взяты точки M, L, K так, что 3AM = AB, 4BL = BD, 5DK = 2DC. В каком отношении плоскость KLM делит отрезок, соединяющий середины ребер AD и BC?

88. На ребрах DA, DB и DC пирамиды ABCD взяты соответственно точки K, L и M так, что DK : DA = 1:2, DL : DB = 2 : 5, DM : DC = 3 : 4, G – точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении плоскость KLM делит отрезок DG?

Домашнее задание.

89. Докажите, что биссектор двугранного угла при ребре тетраэдра делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней тетраэдра, лежащих на гранях этого угла.

90. Докажите, что если x_1, x_2, x_3, x_4 – расстояния от произвольной точки внутри тетраэдра до его граней, а h_1, h_2, h_3, h_4 – длины соответствующих высот тетраэдра, то $\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}=1$.

91. Дана выпуклая четырехугольная пирамида MABCD с вершиной M. Плоскость пересекает ребра MA, MB, MC и MD в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что $S_{BCD}\frac{MA}{MA_1}+S_{ABD}\frac{MC}{MC_1}=S_{ABC}\frac{MD}{MD_1}+S_{ACD}\frac{MB}{MB_1}$. Указание. Вычислите дважды объем пирамиды $MA_1B_1C_1D_1$, проводя по очереди диагональные сечения исходной пирамиды.

92. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра AA_1 равна a, $\angle B_1AB = \alpha$, $\angle C_1BC = \beta$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1 и расстояние между прямыми AD_1и DC_1.

93. В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD, в котором AB = a, AD = b, SC = h – высота пирамиды. Найдите двугранный угол между гранями ABS и ADS. *Указание: найдя синус, не торопитесь писать в ответе arcsin.*

94. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со стороной 2, боковое ребро $AA_1 = 4$. M и K – середины ребер соответственно CC_1 и AA_1. Найдите а) расстояние от точки B до плоскости KB_1C; б) угол между плоскостями KB_1C и BA_1M.

95. На ребрах AB и CD тетраэдра ABCD взяты точки K и M так, что AK = 1/3 AB, CM = 3/5 CD. В каком отношении плоскость, проходящая через BC и середину AD, делит отрезок KM?

96. Плоскость пересекает ребра AB, BC, CD и DA тетраэдра ABCD в точках K, L, M и P. Известно, что K – середина AB, BL : BC = 1 : 3, CM : CD = 3 : 4. Найдите отношение, в котором KM делит отрезок LP.