Неравенства

Иррациональные

Метод замены множителя основан на возрастании функции $y = \sqrt{x}$. Выражения $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ и $f(x) - g(x)$ имеют один и тот же знак при условиях $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$.

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leqslant 0$ методом замены множителя, а затем обобщенным методом интервалов. Сравните логику решения (и ответы :)
2. Решите неравенство:

   а) $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$;
   б) $3 - x > 3\sqrt{1-x^2}$;
   в) $\frac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x} \geqslant -1$;
   г) $x^2 \geqslant x(2 + \sqrt{12-2x-x^2})$.

3. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $\min\left(\log_3(3x+5); \sqrt{x^2-x-2}\right) < 2$.
4. Решите неравенство:

   а) $11\sqrt{2x - \sqrt{48x-144}} > 2x - 12$;
   б) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x(x+7)} < 35 - 2x$;
   в) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \geqslant 2$;
   г) $\log_x\left(x + \frac{1}{3}\right) \leqslant \log_{\sqrt{2x+3}}\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

5. * Решите неравенство почти устно: $|\sqrt{x+3} - 2| + \sqrt{x+3} + |x+1| \leqslant x + 3$.

Тригонометрические

6. Решите неравенство:

   а) $\log_{\sin x} \cos x \leqslant 1$;
   б) $\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} < \sin^2 x$;
   в) $\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) > \frac{2}{\log_5 |\sin x|}$;
   г) $1 + \sin^2 3\pi x \cdot \log_{\frac{1}{2}}(5x - x^2 - 6) \leqslant \cos 6\pi x$.

7. Найдите все решения неравенства $\operatorname{tg} x > \frac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2}$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

Домашнее задание

8. Решите неравенство:

   а) $\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}$;
   б) $\sqrt{2 - \sqrt{x+3}} < \sqrt{x+4}$;
   в) $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1$;
   г) $\sqrt{x^2-5} + 3 > |x-1|$;
   д) $\sqrt{x^2-x-2} \leqslant x - 1$;
   е) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$;
   ж) $\frac{\sqrt{x^2+x-6} + 3x + 13}{x+5} > 1$;
   з) $x\sqrt{4-3x-x^2} \geqslant \left(\frac{4}{x} - 3\right)\sqrt{(4+x)(1-x)}$.

9. Найдите все решения неравенства $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.