Логарифм и его свойства

Определение логарифма. Логарифмическая функция

Показательные уравнения из предыдущего листка чудесным образом имели рациональные решения. А всегда ли имеет решение уравнение $a^x = b$?

Определение. Показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b, называется **логарифмом числа $b > 0$ по основанию a**. То есть $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$.

88. Пользуясь только определением логарифма, вычислите: а) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; б) $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6}$.

Дать объекту определение — еще не значит убедиться в его существовании. Для каких a и b существует $\log_a b$?

Определение. Функция, обратная к показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется ***логарифмической*** и обозначается $y = \log_a x$.

Вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$, а вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.

89. Постройте графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции вытекает, что функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена для всех $x > 0$ и является на этом множестве непрерывной и монотонной (возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$).

90. Сравните: а) $\log_3 \frac{1}{5}$ и $\log_3 \frac{1}{6}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 6$.

91. а) Решите уравнение $3^x = 5$; б) Решите неравенства $3^x > 5$, $(0,3)^x > 5$.

Основное логарифмическое тождество. $\boxed{a^{\log_a c} = c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$.

92. Вычислите $9^{\log_3 5}$.

Арифметические свойства логарифмов

Теорема о логарифме произведения. $\boxed{\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Следствие. $\boxed{\log_a b^n = n \log_a b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема о логарифме частного. $\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Теорема о логарифме степени. $\boxed{\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

93. Вычислите: а) $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$; б) $\log_4 8 + \log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9}$.

Еще несколько полезных формул

Формула перехода к другому основанию. $\boxed{\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$.

94. Пользуясь формулой перехода, вычислите логарифмы: а) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$; б) $\log_{6\sqrt[6]{6}} \sqrt[4]{6}$.

Следствие 1. $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

95. Вычислите $2^{\frac{3}{\log_{\sqrt[3]{6}} 2}}$.

Следствие 2. $\boxed{\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$.

96. Вычислите $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$

Формула "обмена этажами". $\boxed{b^{\log_a c} = c^{\log_a b}}$

97. а) Вычислите $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; б) Вычислите еще раз $9^{\log_3 5}$.

Задачи

98. Вычислите:

а) $\log_9(\log_4\sqrt[3]{4})$; г) $\log_{\sqrt{3}}2^{\frac{1}{3}}+\log_{\sqrt[3]{3}}4^{\frac{1}{3}}-\log_3\sqrt[3]{256}$;

б) $(3\sqrt{3})^{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2\sqrt[3]{2})}$; д)* $4^{\log_{0,25}0,1}+\log_3\dfrac{81}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\log_{\frac{1}{9}}\dfrac{1}{12+2\sqrt{35}}$;

в) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 16\cdot\log_2 3)$; е)* $(\log_2 7+\log_7 16+4)(\log_2 7-2\log_{28}7)\log_7 2-\log_2 7$.

99. Постройте график функции: а) $y=\log_2 x^2$; б) $y=\log_x 2$;
в) $y=-\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}-x\right)+\log_3\sqrt{9x^2-6x+1}$; г)* $y=0,5\log_2\sin^2 x$.

100. Пусть $\ln 2=a$, $\log_2 7=b$. Найдите $\ln 56$.

101. Пусть $\log_2 3=a$, $\log_5 3=b$, $\log_7 3=c$. Выразите $\log_{140}9$ через a, b и c.

102. Сравните: а) $\log_5\sqrt{2}$ и $\log_{25}3$; б) $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$; в) $\log_3 10+4\lg 3$ и 4.

103. а) Докажите, что при $a>1$ выполняется неравенство $\log_a(a+1)>\log_{a+1}(a+2)$.
б) Сравните $\log_{17}19$ и $\log_{19}20$.

104. Сравните $\log_{135}675$ и $\log_{45}75$.

105. Сравните e^{π} и π^{e}.

106. Решите уравнение: а) $\log_x 2\sqrt[4]{2}=-\dfrac{3}{4}$; б) $\lg^2 5-\lg^2 3=(1-\lg x)\lg\dfrac{5}{3}$;
в) $\log_{\sqrt{2}}x+\log_2 x=1,5$; г) $\log_6 x\cdot\log_8 x=9\log_6 8$.

107. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2^{\log_{\sqrt[4]{2}}a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a}{7^{\log_{49}a^4}-5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{a}}-1}$; б) $a^{\sqrt{\log_a b}}-b^{\sqrt{\log_b a}}$.

108. Зная, что $0,3<\lg 2<0,302$, найдите количество знаков в десятичной записи числа 2^{100}.

109. Пусть $z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$. Докажите, что тогда $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

110. * Вычислите $15\lg_x(x-1)$, если $x^3-4x^2+3x=1$.

Еще показательные уравнения и неравенства

111. Решите уравнения:

а) $2^{x-1}-2^{x-2}=6\cdot 3^{2-x}$; д) $2\cdot 15^x-3^{x+2}-4\cdot 5^{x+1}+90=0$;

б) $4^{1+\lg x}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{2+\lg x^2}=0$; е) $7^{x+3}\cdot 3^{\frac{x+3}{x+2}}=1$;

в) $(2\cdot 3^x+5^x)\cdot(3^{x+1}+2\cdot 5^x)=15^{x+1}$; ж) $5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$;

г) $9^{\sqrt{x}+0,5}-39\cdot 3^{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}+12=0$; з) $2^{x+3}-3^{x^2+2x-6}=3^{x^2+2x-5}-2^x$;.

112. Решите уравнение $a\cdot 12^{|x|}=2-12^{-|x|}$.

113. Решите неравенство $6^{x+2}\geqslant 4\cdot 7^{|x+1|}$

Домашнее задание

114. Постройте график функции:

а) $y=\log_{\frac{1}{2}}(-2x)$; б) $y=0,5^{\log_{0,5}(1-x^2)}$; в) $y=\log_2\operatorname{tg}x$; г) $y=\log_2\log_2 x$.

115. Постройте график функции: а) $y=x^{\frac{\log_2\log_2 x}{\log_2 x}}$; б) $2^{|\log_{0,5}x|}$.

116. Прологарифмируйте равенство по основанию 10: $x=\dfrac{\sqrt[3]{100\sqrt{10a\sqrt[3]{0,1a^2}}}}{10\sqrt{0,1a}}$.

117. Докажите, что для любой показательной функции $f(x)=a^x$ и любой геометрической прогрессии $b_1,\ b_2,\ b_3,\dots$ с положительными членами найдется такая арифметическая прогрессия $x_1,\ x_2,\ x_3,\dots$, что для всех n будет $f(x_n)=b_n$.

118. Вычислите:

а) $\log_{4\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{32}$; г) $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14 - \frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}} 56}{\log_{\sqrt{6}} 30 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 150}$; ж) $\dfrac{\log_7 5 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 4 + 2\log_4 2}{2(2\log_3 2 + 3\log_{343} 7)}$;

б) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$; д) $\dfrac{\log_5 12 - 2\log_5 2}{\log_5 18 = \log_5 0,5}$; з) $\left(3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}} + 4^{1+\log_4 25}\right)^{\frac{1}{2}}$;

в) $25^{\log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{125} 9^3}$; е) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; и) $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}}(\cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \sin 17^\circ)$.

119. Найдите значение выражения $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

120. Решите уравнение: а) $\lg x = \frac{2}{3}\lg 24 - 2 + 1\frac{1}{3}\lg 3$; б) $\log_4 x + \log_{16} x + \log_{64} x = \frac{11}{12}$.

121. Пусть $\log_a 27 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.

122. Пусть $\lg 5 = a$, $\lg_3 = b$. Выразите $\log_{30} 8$ через a и b.

123. Пусть $\log_7 2 = a$, $\log_3 2 = b$. Найдите $\log_{63} 4$.

124. Пусть $\log_{12} 18 = a$, $\log_{24} 54 = b$. Докажите, что $ab + 5(a - b) = 1$.

125. Пусть $\log_{ab} a = n$. Найдите $\log_{ab}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

126. Сравните: а) $\log_2 \frac{1}{7}$ и $\log_3 \frac{1}{7}$; б) $\log_5 130$ и $\log_3 25$.

127. Сравните: а) $\log_2 3 + \log_3 2$ и $\log_5 5\sqrt{5}$; б) $\log_7 10$ и $\log_{11} 13$; в) $5^{\log_3 7} + \sqrt{7}$ и $7^{\log_3 5} + 7^{\frac{1}{3}\log_7 19}$.

128. Упростите выражение $a^{\frac{2}{\log_b a}+1} \cdot b - 2a^{1+\log_a b} \cdot b^{1+\log_b a} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

129. Дано: $a^2 + b^2 = 7ab$, $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что $\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

130. Вычислите: а) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ$;
б) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.