Показательная функция

Определение и свойства

Будем считать известными свойства степени с рациональным показателем.

Определение степени с действительным показателем. Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим r_n — последовательность рациональных чисел, сходящихся к x. Тогда $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Для проверки корректности этого определения надо убедиться, что указанный предел существует и не зависит от выбора последовательности.

Определение. Пусть $a > 0$. Функция $y = a^x$, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$, называется ***показательной***.

Согласно определению степени с действительным показателем, $1^x = 1$ для всех действительных x. Поэтому рассматривать показательную функцию при $a = 1$ незачем.

Свойства показательной функции:

1) При $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, а при $0 < a < 1$ — убывает на $\mathbb{R}$.
2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
3) $(a^x)^y = a^{xy}$.
4) Функция $y = a^x$ непрерывна в каждой точке числовой оси.
5) Областью значений показательной функции является множество всех положительных чисел.

75. Сравните числа: а) $(\sqrt{2})^{-0,3}$ и $(\sqrt{2})^{-0,2}$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{e}$.
76. Постройте график функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$
77. Как по графику функции $y = c \cdot a^x$ определить основание a и коэффициент c?

Показательные уравнения

Так как показательная функция монотонна, то для всех $a > 0$, $a \neq 1$ верен переход $\left(a^{f(x)} = a^{g(x)}\right) \Leftrightarrow (f(x) = g(x))$

78. Решите уравнение:

а) $25^{3-2x} = \frac{1}{125} \cdot (25\sqrt{5})^{-x}$; б) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$; в) $4^x + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 9^x = 0$.

79. Решите уравнение:

а) $4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$;
б) $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} = 12$;
в) $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$;
г) $7^{x+3} - 7^{x+2} - 2^{x+5} + 2 \cdot 0,25^{-(1+0,5x)} = 0$;
д) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;
е)* $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$;
ж)* $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

80. Найдите все значения p, при которых уравнение $(p-1) \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + (p+2) = 0$ имеет хотя бы одно решение.
81. Решите уравнение:

а) $(x-3)^{\frac{x+1}{4}} = \sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$; б) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$; в) $|\cos x|^{\sin^2 x - 1,5\sin x + 0,5} = 1$.

Показательные неравенства

Для всех $a > 1$ верен переход $\left(a^{f(x)} > a^{g(x)}\right) \Leftrightarrow (f(x) > g(x))$.

Для всех $0 < a < 1$ верен переход $\left(a^{f(x)} > a^{g(x)}\right) \Leftrightarrow (f(x) < g(x))$.

$$\left(f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ (f(x)-1)(g(x)-h(x)) > 0 \end{cases}$$

82. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)} > 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$;
б) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;
в) $\frac{15 - 16^{x+1}}{4^{2x} - 4} \geqslant 2^{4x+1} - 3$;
г) $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 < 0$;
д) $9 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{-\frac{1}{x}} < 4 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;
е) $(x^2 - x + 1)^x < 1$.

Домашнее задание

83. Докажите, что $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ и $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$ для любых $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

84. Сравните числа: а) $0,1^{-1,2}$ и $0,1^{-1,3}$; б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.

85. Решите уравнение:

а) $3^{x-1} \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} \cdot 3^x = \frac{7}{36}$;

б) $\frac{2^x}{5^{x-1}} + 3 = \frac{5^x}{2^{x-1}}$;

в) $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} = 64$;

г) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;

д) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$;

е) $8^{x+1} + 8 \cdot (0,5)^{3x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 125 - 24 \cdot (0,5)^x$;

ж) $25^{1-\cos 6x} = 5^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}$;

з) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$;

и) $3^x + 3^{2-x} = 3 \cdot (1 + \cos 2\pi x)$;

к) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

86. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{2 \cdot 4^x + 1}{2^x + 2} - 4^x = \dfrac{y}{2^{x+1} + 4} \\ 4 \cdot 2^{3x} + y^2 = 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$

87. Решите неравенство:

а) $4^{\sqrt{9-x^2}+1} + 2 < 9 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}$;

б) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

в) $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$;

г) $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} \leqslant 1$;

д) $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant (x^2 + x + 1)^3$;

е) $f\left(g(x)\right) < g\left(f(x)\right)$, где $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$.