Экстремальные задачи

Экстремумы. Критические точки. Необходимое условие существования экстремума

Определение. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет ***максимум (минимум)***, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значения во всех точках вблизи x_0, т.е. если для всех точек x некоторой проколотой окрестности точки x_0 имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках — ***экстремумами*** функции.

Данные выше определения описывают строгие локальные экстремумы. В определении нестрогих экстремумов вместо строгих неравенств используются нестрогие.

Теорема Ферма (Необходимое условие существования экстремума). В точке экстремума производная функции либо равна нулю, либо не существует.

1. Истолкуйте теорему Ферма геометрически.
2. Проверьте, что теорема Ферма верна как для строгого, так и для нестрогого экстремума.
3. а) Пусть функция непрерывна, но недифференцируема в точке x_0. Обязательно ли она имеет в этой точке экстремум? б) Пусть функция имеет нулевую производную в точке x_0. Обязательно ли она имеет в этой точке экстремум?

   Определение. Значения аргумента из области определения функции, при которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются ***критическими точками***.
4. Найдите критические точки функции. Являются ли они точками минимума или максимума? Изобразите схематически графики.

   а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
5. Найдите критические точки функции:

   а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-5)$; в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.
6. * Найдите критические точки функции $y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2}\cos x$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Напомним теорему Вейерштрасса: функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своих точных верхней и нижней граней. Из теоремы Ферма следует, что это может происходить либо в критических точках, либо на концах отрезка.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций: а) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[0,01;\ 90]$; б) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+4x+11}} + 2$ на отрезке $[-3;\ 3]$; в) $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ на отрезке $[-0,8;\ 4]$.

   Замечания.

   1) Функция $f(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в той же точке, что и функции: $f(x) + c$; $kf(x)$, где $k > 0$; $f^n(x)$, где $n \in \mathbb{N}$, $f(x) \geqslant 0$.

   2) Если функция $f(x)$ принимает в некоторой точке наибольшее (наименьшее) значение, то функции $-f(x)$ и $\dfrac{1}{f(x)}$ (при условии $f(x) > 0$) принимают в этой же точке наименьшее (наибольшее) значения.
8. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = -\cos^2 x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.
9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x\ln x - x\ln 5$ на отрезке $[1;\ 5]$.
10. Найдите наименьшее из значений, принимаемых функцией $y = x + \dfrac{4}{(x-2)^2}$ на отрезке $[0;\ 5]$, $x \neq 2$.
11. * Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + \sqrt{(x^2+6x+9)(x^2+2x+1)}$ на отрезке $[-4;\ -\frac{5}{4}]$.
12. * Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = e^x \sin x$ на отрезке $[0;\ \frac{5\pi}{6}]$.

Экстремальные задачи

13. Сопротивление изгибу балки прямоугольного сечения пропорционально ее ширине x и квадрату высоты y: $P = kxy^2$. Какое сечение должна иметь балка, вырезанная из цилиндрического бревна радиуса R?

    Следующие три задачи в учебнике Виленкина решены с помощью производной. А как их решить элементарно?

14. Какова наибольшая площадь прямоугольного участка земли, который можно огородить забором длины $2p$?

15. Найдите прямоугольник наибольшей площади, вписанный в окружность радиуса R.

16. Луч света движется из одной точки в другую, отражаясь от плоского зеркала. При этом он "выбирает"путь наименьшей длины. Докажите, что в таком случае угол падения равен углу отражения.

17. В круг радиуса R впишите равнобедренный треугольник наибольшей площади.

18. При каких размерах прямоугольная коробка без крышки с квадратным основанием и полной поверхностью S имеет наибольший объем?

19. Найдите радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

20. Если батарея с ЭДС E и внутренним сопротивлением r замкнута проводником с сопротивлением R, то мощность получающегося тока выражается формулой $W = \dfrac{E^2R}{(R+r)^2}$. При каком значении R мощность будет наибольшей?

21. Найдите расстояние от точки $M(0;\,-2)$ до кривой $y = \dfrac{16}{\sqrt{3x^3}} - 2$, $x > 0$.

22. Найдите координаты точки, лежащей на графике функции $y = 1 + \cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3} + 2y + 4 = 0$.

Домашнее задание

23. Продифференцируйте функции: а) $4^{\operatorname{tg} x}$; б) $\log_2(\arccos x)$; в) $(\cos 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

24. Напишите уравнения такой касательной к графику $y = x^3 + 2x$, для которой существует параллельная касательная к графику $y = \sin 2x$.

25. Найдите координаты точек пересечения с осью x тех касательных к графику функции $y = \dfrac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол $\dfrac{3\pi}{4}$ с осью x.

26. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{3}t^3 + t^2 - 9t - 9$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна $54\,\text{м/с}$?

27. Найдите критические точки функции:

    а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; б) $f(x) = (x-1)^2(x-6)^3$; в) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

28. Найдите критические точки функции $y = \sin x - \dfrac{2}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{5}\sin 5x$.

29. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

    а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36 + 10$ на отрезке $[-5;\,4]$; б) $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{4}]$;
    в) $y = x^3 - 2x|x-2|$ на отрезке $[0;\,3]$.

30. Из проволоки длиной $24\,\text{см}$ надо сделать модель прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. При каких размерах сторон объем параллелепипеда будет наибольшим?

31. Заданы периметр P и длина a одной из сторон треугольника. Какие длины должны иметь две другие стороны, чтобы его площадь была наибольшей?

32. Найдите наименьший возможный объем конуса, описанного вокруг полушара радиуса R.

33. Касательная к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ такова, что абсцисса точки касания принадлежит отрезку $[5;\,9]$. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x = 4$.

34. В равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 1 и основанием a вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь в зависимости от a? При каком a площадь наибольшего прямоугольника будет наибольшей?

35. Освещенность в данной точке пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до этого источника. В точках O_1 и O_1, удаленных друг от друга на расстояние a, помещены источники, имеющие соответственно силу света I_1 и I_2. Найдите наименее освещенную точку отрезка O_1O_2.

36. В первую бочку налито $16\,\text{кг}$ раствора соли, а во вторую — $25\,\text{кг}$. Оба раствора разбавили водой так, что процентное содержание соли в первой бочке уменьшилось в m раз, а во второй — в n раз. Известно, что $mn = m + n + 3$. Найдите наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе бочки вместе.