

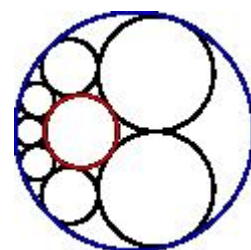
## Инверсия (продолжение).

Определение. Пусть окружности пересекаются в точке  $P$ . Углом между окружностями в точке  $P$  называется угол между касательными к этим окружностям, проведенными в этой точке.

Окружности называются ортогональными, если угол между ними равен  $90^\circ$ .

Угол между прямой и окружностью определяется аналогично.

1. Докажите, что угол между пересекающимися окружностями (или окружностью и прямой) не зависит от выбора точки пересечения.
2. Угол между двумя линиями (окружностями или прямыми) равен углу между их образами при инверсии.
3. Даны две окружности  $S$  и  $T$ . Докажите, что следующие условия эквивалентны
  - а) Окружности  $S$  и  $T$  ортогональны.
  - б) При инверсии относительно  $S$  окружность  $T$  переходит в себя.
  - в) Окружность  $T$  проходит через пару точек, инверсных относительно  $S$ .
4. Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.
5. На окружности  $w$  выбраны точки  $A$  и  $B$ . Рассматриваются всевозможные пары касающихся окружностей  $w_1$  и  $w_2$ , лежащих внутри  $w$ , таких, что  $w_1$  касается  $w$  в точке  $A$ , а  $w_2$  касается  $w$  в точке  $B$ . Найдите множество точек касания окружностей  $w_1$  и  $w_2$ .
6. В сегмент вписаны всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество точек касания.
7. Четыре окружности расположены так, что первая касается второй в точке  $A$ , вторая третьей – в точке  $B$ , третья четвертой – в точке  $C$ , а четвертая первой – в точке  $D$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной окружности.
8. а) Докажите, что расстояния между точками  $A$  и  $B$  и их образами  $A_1$  и  $B_1$  при инверсии с центром  $O$  и радиусом  $R$  связаны соотношением  $A_1B_1 = \frac{R^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$   
 б) (Теорема Птолемея.) Докажите, что во вписанном четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей.
9. а) Окружности  $S$  и  $T$  перпендикулярны прямой  $l$  и окружности  $\omega$ . Нарисуйте образ этой картинке после инверсии с центром в точке  $N$  – точке пересечения  $l$  и  $\omega$ .  
 б) Докажите, что для любых двух окружностей существует инверсия, которая отражает их либо на пару прямых, либо на две концентрические окружности.
10. (Поризм Штейнера) Пусть окружности  $w_1$  и  $w_2$  не пересекаются. Предположим, что существует цепочка окружностей,  $S_1, S_2, \dots, S_n$  таких, что каждая касается двух соседних ( $S_n$  касается  $S_1$  и  $S_{n-1}$ ), а также  $w_1$  и  $w_2$ . Тогда для любой окружности  $T$  касающейся  $w_1$  и  $w_2$ . существует аналогичная цепочка из  $n$  окружностей.



Указание: используйте предыдущую задачу.