Инверсия (продолжение).

<u>Определение.</u> Пусть окружности пересекаются в точке P. <u>Углом между окружностями</u> в точке P называется угол между касательными к этим окружностям, проведенными в этой точке.

Окружности называются <u>ортогональными</u>, если угол между ними равен 90°.

Угол между прямой и окружностью определяется аналогично.

1. Докажите, что угол между пересекающимися окружностями (или окружностью и прямой) не зависит от выбора точки пересечения.
2. Угол между двумя линиями (окружностями или прямыми) равен углу между их образами при инверсии.
3. Даны две окружности S *и* T . Докажите, что следующие условие эквивалентны

а) Окружности S и T ортогональны.

б) При инверсии относительно S окружность T переходит в себя.

в) Окружность T проходит через пару точек, инверсных относительно S.

4. Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.
5. На окружности w выбраны точки A и B. Рассматриваются всевозможные пары касающихся окружностей w_1 и w_2, лежащих внутри w, таких, что w_1 касается w в точке A, а w_2 касается w в точке B. Найдите множество точек касания окружностей w_1 и w_2.
6. В сегмент вписаны всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество точек касания.
7. Четыре окружности расположены так, что первая касается второй в точке A, вторая третьей – в точке B, третья четвёртой – в точке C, а четвёртая первой – в точке D. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
8. а) Докажите, что расстояния между точками A и B и их образами A_1 и B_1 при инверсии с центром O и радиусом R связаны соотношением $A_1B_1 = \dfrac{R^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$

   б) (Теорема Птолемея.) Докажите, что во вписанном четырехугольнике сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей.
9. а) Окружности S и T перпендикулярны прямой l и окружности ω. Нарисуйте образ этой картинки после инверсии с центром в точке N – точке пересечения l и ω.

   б) Докажите, что для любых двух окружностей существует инверсия, которая отражает их либо на пару прямых, либо на две концентрические окружности.
10. *(Поризм Штейнера)* Пусть окружности w_1 и w_2 не пересекаются. Предположим, что существует цепочка окружностей, $S_1, S_2, \ldots S_n$ таких, что каждая касается двух соседних (S_n касается S_1 и S_{n-1}), а также w_1 и w_2. Тогда для любой окружности T касающейся w_1 и w_2. существует аналогичная цепочка из n окружностей.

    Указание: используйте предыдущую задачу.