Олимпиада «Ломоносов-2009»

11в класс, 22 января 2011

1) Вычислите

$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}-\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2},$$

если $x=1,\underbrace{2\ldots 22}_{46}$ и $y=-2,\underbrace{7\ldots 77}_{45}8$.

2) Решите неравенство

$$\frac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1}\geqslant\frac{1}{1-2^{-x}}.$$

3) Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC=5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

4) Решите уравнение $\log_4(4\sin^2 2x)=2-\log_2(-2\operatorname{tg}x)$.

5) На окружности взята точка A, на ее диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найдите BC, если $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle BAF=\angle CAE$, $BD=2$, $BE=5$ и $BF=4$.

6) Решите неравенство $5|x|\leqslant x(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2})$.

7) Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней, опущенными из той же вершины, одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

8) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4x-\Big|3x-|x+a|\Big|=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

9) Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью относительно воды попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по одному часу. В итоге лодка прошла путь в 40 км относительно берега и, отчалив отпристани A, причалила к пристани B в 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

10) При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством $3|x|^n+8|y|^n+|z|^n<1$, а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объем тела Φ.