Уроки № 75-76 27.01.11

Неравенства.

---

1. Олимпиада «Ломоносов-2005». Для тех, кто получил зачет по С3:

решение задач №№ 6-10 олимпиады Ломоносов-2005.

2. Диагностическая работа С3 Для всех остальных

Из С3: стр. 8 диагностическая работа.

3. Домашнее задание.

Дорешивать задачи из диагностической работы.

Уроки № 77-78 28.01.11

Неравенства.

---

1. Разбор задач олимпиады «Ломоносов-2005».

Задача 7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней, опущенными из той же вершины, одинаковые углы, не меньшие $30°$. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

Соображение: основание высоты пирамиды может падать не только в центр вписанной окружности, но и в центр вневписанной. Правильный ответ $150\sqrt{3}$.

Задача 10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством $3|x|^n + 8|y|^n + |z|^n < 1$, а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объем тела Φ.

Искомая фигура задается системой:

$$\begin{cases} |x| < 1; \\ |y| < \dfrac{1}{8}; \\ |z| < 1. \end{cases}$$

Чтобы это доказать, нужно доказать, что любая точка любой фигуры Φ_n удовлетворяет системе (это почти очевидно), и доказать, что для любой точки, удовлетворяющей системе, можно выбрать n такое, чтобы эта точка принадлежала Φ_n (это следует из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = 0$, если $|a| < 1$).

Ответ: 1.

Задача 9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью относительно воды попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по одному часу. В итоге лодка прошла путь в 40 км относительно берега и, отчалив отпристани A, причалила к пристани B в 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

Ответ: река течет от A к B, максимальная скорость течения — 8 км/ч.

2. Способы решения неравенств.

1) При решении неравенств часто выгодно применять метод интервалов. Пусть есть неравенство $f(x) * 0$, где $*$ — какой-нибудь знак неравенства. Тогда

1. рассмотрим $D(f)$

пусть $D(f)$ — конечное или счетное число промежутков, на каждом из которых f непрерывна. Тогда

2. найдем нули $f(x)$. Нули разобьют промежутки непрерывности на промежутки знакопостоянства функции.

3. Определим знаки на каждом промежутке.

4. Запишем ответ.

Например, задача 4 диагностической работы. Приведем неравенство к равносильному:

$$\frac{(x^2+4)(x-2)(x+2)}{2^{10-x^2}-2^{3x}} \leqslant 0.$$

ОДЗ: $x \neq 2$, $x \neq -5$ (знаменатель обращается в нуль в двух точках).

Нанесем на ось, заштрихуем нужную область.

Нули на ОДЗ: $x = -2$.

Нанесем на ось, расставим знаки в заштрихованной области.

Ответ: $x \in (-\infty; 5) \cup (-2; +\infty) \setminus \{2\}$.

2) Задача 6 из диагностической работы:

Основная ошибка была в том, что забыли, что $x+2$ может быть меньше единицы, а в этом случае $log_{x+2}(t)$ — убывающая функция!

При решении неравенства удобно получить неравенство, в котором один знак логарифма. Прежде чем это делать, нужно написать ОДЗ, поскольку применяемые преобразования приводят к следствию, а не равносильному неравенству:

$$\begin{cases} x+2>0; \\ x+2 \neq 1; \\ 7x^2-x^3>0; \\ x^2-3x>0; \\ 5-x>0. \end{cases}$$

Неравенство сведется к такому:

$$\log_{x+2} \frac{x^2(7-x)}{x(x-3)(5-x)} \geqslant 0.$$

Дальше нужно либо рассматривать случаи на основание логарифма (больше и меньше единицы), либо применить формулу

$$\log_a b * 0 \;\Rightarrow\; (a-1)(b-1) * 0.$$

С учетом ОДЗ наше неравенство будет равносильно рациональному:

$$(x+2-1)\left(\frac{x^2(7-x)}{x(x-3)(5-x)} - 1\right) \geqslant 0.$$

Ответ: $x \in (-2;-1) \cup (3;5)$.

3) Просто задача:

$$\frac{\log_3(10x+3)\log_3(3x+10)}{\log_3(10x)\log_3 x} \geqslant 0.$$

Неравенство на применение метода интервалов. Находим ОДЗ, оказывается, что нулей у функции нет, определяем знаки.

Ответ: $x \in (0;0.1) \cup (1;+\infty)$.

4) Задача 14 диагностической работы.

Свойство логарифмов $\log_a b^n = n\log_a b$ позволяет упрощать неравенство взятием логарифма от обеих частей. Если основание логарифма больше единицы, а обе части неравенства были положительны, то взяв логарифм, мы получим равносильное неравенство:

$$x^{\lg x} + \sqrt{10}^{\lg^2 x} < 6;$$

которое приводится к квадратному неравенству:

$$x^{\lg x} + x^{\frac{\lg x}{2}} - 6 < 0;$$

которое имеет решение

$$-3 < x^{\frac{\lg x}{2}} < 2 \;\Leftrightarrow\; 0 < x^{\frac{\lg x}{2}} < 2.$$

Снова возьмем логарифм и возведем положительные части неравенства в квадрат:

$$\lg^2 x < \lg 4$$

Откуда легко получить ответ: $x \in (10^{-\sqrt{\lg 4}}; 10^{\sqrt{\lg 4}})$.

5) Задача 6 из олимпиады «Ломоносов-2005».

Решите неравенство $5|x| \leqslant x(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2})$.

Неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0; \\ 8 - 2x - x^2 \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0; \\ 2\sqrt{8 - 2x - x^2} \leqslant 3x - 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0; \\ 2\sqrt{8 - 2x - x^2} \geqslant 3x + 7. \end{cases} \end{array}\right.$$

При возведении в квадрат неравенства второй системы должны быть выполнены следующие ограничения (ими нельзя пренебрегать!):

$$\begin{cases} 8 - 2x - x^2 \geqslant 0; \\ 3x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

При решении третьей системы сталкиваемся с двумя вариантами: либо правая часть отрицательна, и тогда главное, чтобы корень существовал, либо правая часть положительна, и тогда можно возвести обе части в квадрат (подкоренное выражение автоматически будет неотрицательным).

При решении иррациональных неравенств нужно очень внимательно следить за равносильностью получаемых систем.

Ответ: $x \in [-4; \frac{2\sqrt{101}-25}{13}] \cup \{0\} \cup [\frac{23}{13}; 2]$

Задача 8 олимпиады «Ломоносов-2005». Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4x - \Big|3x - |x + a|\Big| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Рассмотрим $f(x) = 9|x-1| - 4x + \Big|3x - |x+a|\Big|$. Эта функция кусочно-линейна, причем при $x \geqslant 1$ коэффициент при x равен $9 - 4 \pm 3 \pm 1 > 0$, значит, $f(x) \upuparrows$, а при $x < 1$ коэффициент при x равен $-9 - 4 \pm 3 \pm 1 > 0$, значит, $f(x) \downdownarrows$.

Значит, в точке $x = 1$ $f(x)$ имеет глобальный минимум, поэтому уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $f(1) \leqslant 0$. Подставим единицу и решим неравенство с модулями относительно a.

Ответ: $a \in [-8; 6]$.

3. Домашнее задание.

Книжечка С3: внимательно прочитать *всю* теорию (7 параграфов). Диагностическая работа состояла из 16 задач по семи темам. Если по какой-то задаче у вас стоит не плюс, нужно решить задачу из соответствующей темы, причем выбрать ту, которая кажется наименее простой. Таким образом, в вашей домашней работе должно быть решено от 1 до 7 задач в зависимости от успешности решения на уроке.