Свойства определенного интеграла. Геометрический смысл

1. Определенный интеграл.

Вспомним определение определенного интеграла:

***Определение* 1.** Пусть задана скорость движения $v(t)$ на отрезке времени $[t_1; t_2]$. Перемещение точки за время от $t = a$ до $t = b$ называется *(определенным) интегралом* функции $v(t)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b v(t)dt.$$

Если $x(t)$ — функция перемещения точки, то

$$\int\limits_a^b v(t)dt = x(b) - x(a) = x(t)\,\Big|_a^b.$$

Мы знаем, что $v(t) = x'(t)$, т. е. $x(t)$ — одна из первообразных функции $v(t)$. Заметим, что если взять другую первообразную $V(t)$, то, поскольку $V(t) = x(t) + C$, то $V(b) - V(a) = x(b) + C - x(a) - C = \int\limits_a^b v(t)dt$.

Таким образом, по определению, если есть функция $f(x)$, определенная и непрерывная на $D(f)$, $[a; b] \subset D(f)$, и $F(x)$ — одна из первообразных $f(x)$, то определенным интегралом по отрезку $[a; b]$ называется разность $F(b) - F(a)$ (формула Ньютона-Лейбница).

Условие непрерывности важно — вспомним, например, вычисление первообразной для $\frac{1}{1+x^2}$. Вообще-то интеграл можно определять не только для непрерывных функций, а для более общего класса функций, называемых *квадрируемыми*, но это тема для более серьезного разговора.

2. Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

4) $\int\limits_a^b \Big(kf(x)+mg(x)\Big)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx + m\int\limits_a^b g(x)dx$

Первые три свойства следуют непосредственно из определения, четвертое — из свойств первообразной. Также, поскольку вычисление определенного интеграла, по сути, сводится к вычислению неопределенного, при нахождении интегралов можно использовать замену переменной и интегрирование по частям.

Например, пусть надо вычислить интеграл $\int\limits_a^b f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x)dx$. Покажем, что будет выполнено следующее равенство:

$$\int\limits_a^b f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Пусть $F'(t) = f(t)$, а $G'(x) = f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x)$. Тогда

$$\big(F\big(\varphi(x)\big)\big)' = F'\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x) = f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x) = G'(x),$$

а это значит, что F и G отличаются на константу.

Поскольку левая часть интегрального равенства равна

$$\int\limits_a^b f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x)dx = G(b) - G(a),$$

а правая

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big),$$

то равенство верно.

Аналогичным образом можно использовать интегрирование по частям. Например, пусть надо вычислить

$$\int\limits_1^e x\ln x dx.$$

Обозначим за $F(x)$ первообразную $x\ln x$, тогда

$$\int\limits_1^e x\ln x dx = F(x)\,\Big|_1^e = \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \int\frac{x}{2}dx\right)\Big|_1^e,$$

или

$$\int\limits_1^e x\ln x dx = \frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x}{2}dx.$$

Или в общем случае

$$\int\limits_a^b v(x)du(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)dv(x).$$

3. Геометрический смысл определенного интеграла.

Пусть тело движется с постоянной скоростью $v(t) = v$. Построим график скорости на отрезке $[a;b]$. Пройденный путь будет равен произведению времени движения на скорость: $x(t)\Big|_a^b = (b-a)\cdot v$, или площади *подграфика* функции $v(t)$.

***Определение* 2.** Если $f(x)$ непрерывна на промежутке I, $[a;b] \subset I$ и $\forall x \in [a;b]$ $f(x) \geqslant 0$, то фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ называется *криволинейной трапецией* или подграфиком функции $f(x)$.

Таким образом, в случае постоянной положительной функции определенный интеграл равен площади соотвествующей криволинейной трапеции. Что делать, если функция не постоянна?

Рассмотрим функцию $S(t)$, равную площади криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс, прямой $x = a$ слева и прямой $x = t$ справа. Тогда

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$$

Поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она непрерывна на Δt, а значит, достигает на этом отрезке своего наибольшего M и наименьшего значения m. Из графика видно, что

$$m\Delta t \leqslant \Delta S \leqslant M\Delta t$$

Поделим неравенство на Δt и рассмотрим предел при $\Delta t \to 0$. Поскольку при $\Delta t \to 0$ $m \to f(t)$, $M \to f(t)$, то

$$f(t) \leqslant S'(t) \leqslant f(t),$$

откуда следует, что $S'(t) = f(t)$.

Воспользуемся формулой

$$\left(\int\limits_a^t f(x)dx\right)' = f(t),$$

и получим, что

$$\int\limits_a^t f(x)dx = S(t) + C.$$

Рассмотрим равенство в точке $t = a$:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = S(a) + C,$$

откуда $C = 0$. Рассмотрим равенство в точке $t = b$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S(b),$$

что означает, что площадь подграфика равна определенному интегралу:

Теорема Нютона-Лейбница. Если $f(x)$ непрерывна на промежутке I, $[a;b] \subset I$ и $\forall x \in [a;b]$ $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади соответсвующей криволинейной трапеции.

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на промежутке I, $[a;b] \subset I$ и $\forall x \in [a;b]$ $f(x) \leqslant 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади соответсвующей криволинейной трапеции, взятой со знаком минус.

4. Решение задач.

1) Вычислите интеграл $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{-2x - x^2}dx$.

Решение. Воспользуемся геометрическим смыслом интеграла и построим график функции $y\sqrt{-2x - x^2}$:

$$y = \sqrt{-2x - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -2x - x^2; \\ y \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1; \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Нас интересует только дуга, ограниченная $x = -2$ и $x = -1$. Площадь этой части круга равна $\frac{\pi}{4}$, поэтому $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{-2x - x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

2) Вычислите $\int\limits_0^4 (|x - 1| + |3 - x|)\, dx$.

Решение. Построим график подынтегральной функции на отрезке $[0;4]$, и рассмотрим площадь получившейся фигуры. Из элементарных геометрических соображений получаем, что площадь равна десяти, т. е. $\int\limits_0^4 (|x-1|+|3-x|)\,dx = 10$.

3) Найдите минимумы функции $\int\limits_0^x \left(2\cos^2 t - \sin 2t\right) dt$ на отрезке $[0;\pi]$.

Решение. Пусть $F(x) = \int\limits_0^x \left(2\cos^2 t - \sin 2t\right) dt$, тогда

$$F'(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x = 2\cos x(\cos x - \sin x).$$

Рассмотрим поведение $F'(x)$ на полуокружности от 0 до π. Критическими точками $F(x)$ являются точки 0; $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π. Знаки на промежутках чередуются, начиная с «+». Поэтому минимум $F(x)$ достигается только в точке $\frac{\pi}{2}$. Вычислим $F(\frac{\pi}{2})$:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos^2 t - \sin 2t\right) dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t - \sin 2t)\,dt =$$
$$= \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

4) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{3-x}$ и $y = |-x-1|-2$.

Решение. Построим графики обеих функций. Видно, что площадь нужной фигуры равна $\int\limits_{-6}^{2} \sqrt{3-x}$, плюс площадь нижнего треугольника, минус площади верхних треугольничков. Ответ: $16\frac{1}{3}$.

5) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2+2|x|-8$ и $y = 4-x^2$.

Решение. Построим графики функций. По чертежу видно, что площадь фигуры равна $2\int\limits_0^2 \Big((4-x^2)-(x^2+2x-8)\Big)dx = 29\frac{1}{3}$.

6) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\frac{x^2}{2}+\frac{19}{2}$ и $x = -|8-y|$.

Ответ: $3\frac{2}{3}$.

7) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{2}{(2x-1)^2}$, касательной к нему в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и прямой $x = 2$.

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

5. Домашнее задание.

1) Решите задачи прошлого домашнего задания.

2) Решите задачи, нерешенные в классе.