Уроки № 47-48 30.11-01.12.10

Дифференциальные уравнения. Самостоятельная работа. Определенный интеграл

1. Самостоятельная работа

Найдите решения каждого из дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным условиям:

1) $y'' = -9y$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -9$; 2) $x^4 y' = y^{-2}$; $y(1) = -1$;

3) $y' \cos^2 x = \sin^2 y$; $y(\pi) = \dfrac{3\pi}{2}$.

4) Материальная точка движется по прямой с ускорением $a(t) = 1 + \sin 2t$. Найдите уравнение ее движения, если $v(0) = 1$; $x(0) = 2$.

5) Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(-2; -0,5)$, если угловой коэффициент касательной к этой кривой в каждой точке противоположен отношению ординаты и абсциссы этой точки.

6) Две одинаковые конические воронки высотой 1 м и радиусом основания 1 м наполнены водой и расположены одна вершиной вверх, а другая — вершиной вниз. В дне каждой из них сделано отверстие диаметром 1 см. Из какой воронки быстрее вытечет вода? Во сколько раз? Найдите время вытекания воды из каждой воронки.

7) Пусть тело движется прямолинейно и совершает колебания в некоторой среде. На него действуют силы: $F_1 = -k_1 x(t)$, возвращающая его в положение равновесия, и $F_2 = -k_2 v(t)$, сила сопротивления, пропорциональная скорости. Составьте уравнение затухающих колебаний и найдите его общее решение.

2. Определенный интеграл.

***Определение* 1.** Пусть задана скорость движения $v(t)$ на отрезке времени $[t_1; t_2]$. Перемещение точки за время от $t = a$ до $t = b$ называется *(определенным) интегралом* функции $v(t)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b v(t)dt.$$

Если $V(t)$ — первообразная для функции $v(t)$, то

$$\int_a^b v(t)dt = V(b) - V(a) = V(t)\Big|_a^b.$$

Эта формула называется *формулой Ньютона-Лейбница.* Мы будем пользоваться ей как определением интеграла.

Поскольку значение интеграла зависит от a и b и не зависит от переменной интегрирования, можно записать, что

$$\int\limits_a^b v(t)dt = \int\limits_a^b v(\tau)d\tau.$$

Выберем $b = t$, тогда

$$\int\limits_a^t v(\tau)d\tau = V(t) - V(a),$$

или

$$V(a) + \int\limits_a^t v(\tau)d\tau = V(t).$$

Возьмем производную от обеих частей, и получим, что

$$\left(\int\limits_a^t v(\tau)d\tau\right)' = v(t),$$

т. е. производная от интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на этом пределе.

3. Решение задач.

Вычислите интегралы:

$$1)\quad \int\limits_0^3 (1+2x)^9 dx; \qquad 2)\quad \int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2}; \qquad 3)\quad \int\limits_{-4}^2 \left(x^2 + 2x - 8x\right).$$

Решение 1 задачи:

$$\int\limits_0^3 (1+2x)^9 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 (1+2x)^9 d(1+2x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2x)^{10}}{10}\Big|_0^3 = \frac{7^{10}-1}{20}$$

Во второй задаче ответ $\frac{\pi}{8}$, в третьей — -36

4. Домашнее задание. Вычислите интегралы (1-7) и найдите производные $F'(x)$ (8-9):

1) $\int\limits_{-10}^{-5} \frac{dt}{t}$;

2) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt[4]{x}dx$;

3) $\int\limits_{2}^{4} 2^x dx$;

4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

5) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$;

6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$;

7) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

8) $F(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{t^4-5t^2+4}{1+\sin^2 t} dt$;

9) $F(x) = \int\limits_{1}^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t} dt$.