Уроки №5-6 07.09.10

Решение задач на изученные ранее темы.

---

1. Разбор домашнего задания

3) Докажите, что при $x > 1$ $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x < \frac{x-1}{x}$.

Идея решения: обозначим за $f(x)$ разность правой и левой частей, $f'(x) = \frac{-2x^2-1}{x^2(x^2+1)}$, $f'(x) < 0$, поэтому $f(x)$ убывает, и $f(1) < 0$.

5) Докажите, что для всех $m > 0$

$$\sqrt[4]{m+3} \geqslant \frac{3+\sqrt[4]{m}}{2\sqrt{2}}.$$

Решение: $\sqrt[4]{x}$ — выпуклая вверх функция, поэтому, если взять две разные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на графике, и выбрать точку $N(x_0, y_0)$ на отрезке AB, то $f(x_0)$ будет выше, чем N. Если N делит отрезок в отношении $p : q$, то этот факт можно записать в виде неравенства:

$$f\left(\frac{px_1+qx_2}{p+q}\right) > \frac{pf(x_1)+qf(x_2)}{p+q}$$

В нашем случае нетрудно понять, что будет выполняться следующее неравенство:

$$\sqrt[4]{\frac{1\cdot m+3\cdot 1}{1+3}} > \frac{1\cdot\sqrt[4]{m}+3\cdot\sqrt[4]{1}}{1+3} \qquad \text{при } m \neq 1,$$

которое сводится к исходному неравенству. При $m = 1$ точки совпадают и достигается равенство.

Задача 4 решалась аналогично, только там неравенство более простое — берется середина отрезка.

6) Определите множество значений функции $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ на отрезке $[-2; \frac{1}{2}]$.

Идея решения: на отрезке функция непрерывна и дифференцируема, производная обращается в нуль в точке -1, максимум $f(-1) = 3$, минимум $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{7}$, функция принимает все значения из отрезка $[\frac{3}{7}; 3]$.

7) Представьте число 8 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма квадрата первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.

Идея решения: нужно найти минимум функции $x^3 + (8-x)^2$ на интервале $(0; 8)$, он получается в точке $x = 2$, таким образом, ответ $(2; 6)$.

8) В данную сферу радиуса R вписан конус. Найдите границы изменения площади его осевого сечения.

Решение: по сути, надо найти границы изменения площади равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса R. Для этого выразим площадь через один из параметров треугольника, например, сторону или угол, и радиус описанной окружности. Это можно сделать разными способами. Например, рассмотрим площадь как функцию от половины основания:

$$S(x) = \left(R + \sqrt{R^2 - x^2}\right) \cdot x.$$

Исследовав эту функцию на промежутке $(0; R]$ (именно в таких пределах может изменяться половина основания), получим максимум $S\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$, и точную нижнюю грань 0, которая не достигается. Таким образом, ответ $(0; \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2]$.

2. Самостоятельное решение задач

1) Докажите, что для всех $c > 0$ выполнено неравенство $\left(\frac{2c+1}{4}\right)^3 \leqslant \frac{8c^3+1}{16}$.

2) Сравните $10 \operatorname{tg} 2,6$ и $7 \operatorname{tg} 2 + 3 \operatorname{tg} 4$.

Решение: График функции $\operatorname{tg} x$ расположен на $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ выпуклостью вверх; отрезок, соединяющий точки графика при $x = 2; 4$ лежит ниже отрезка, соединяющего точки графика при $x = 2; 2\pi - 2$, поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{7 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{10} > \frac{7 \operatorname{tg} 2 + 4 \operatorname{tg} 3}{10}.$$

3) В конус с радиусом основания R и высотой H вписан цилиндр с наибольшей площадью осевого сечения. Найдите размеры цилиндра.

4) В какой точке графика $f(x) = 2x^4 - x$ надо провести касательную, чтобы она пересекла прямые $x = 1$ и $x = 2$ в точках с наибольшей суммой ординат?

5) Буровая вышка B расположена в поле в 9 км от ближайшей точки C дороги. С нее надо отправить курьера в населенный пункт A, расположенный на дороге на расстоянии 15 км от C. Скорость курьера по полю 8 км/ч, а по дороге — 10 км/ч. Каким образом должен двигаться курьер, чтобы прибыть в A как можно быстрее?

6) Докажите, что при $\alpha > 1$ и $x > 0$ можно выбрать M такое, что $\frac{x^\alpha}{e^x} < M$.

7) Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $x \cos x + y \cos y \leqslant y \cos x + x \cos y$.

8) Число 54 представьте в виде трех слагаемых так, чтобы второе было в два раза больше первого, а произведение всех трех было наибольшим.

9) Сравните $\sin 1 + \sin 3$ и $2 \sin 2$.

10) Найдите количество корней уравнений: $x^3 = \sqrt[3]{x}$; $e^x = \ln x$; $x^2 = 2^x$.

11) Исследуйте функцию и постройте ее график: $f(x) = \cos x - \ln \cos x$.

3. Домашнее задание. Задачи 3, 4 и 5 текущего листочка, разобраться с решениями задач 1 и 2 и задачами прошлого дз.