Уроки №1-2 02.09.10

Решение задач на изученные ранее темы.

---

1. Самостоятельная работа на два урока.

Даны функции:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+4};\ \ g(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x};\ \ h_a(x)=\log_{2x+a}(x^2-1);\ \ k(x)=\sqrt{2x+4}-\sqrt{x-1}.$$

1) Проверьте, является ли точка $(2,5;3)$ серединой какого-нибудь отрезка с концами на графике $f(x)$.

2) Что больше, $g(\frac{2\pi}{11})$ или 1?

3) Отметьте на плоскости все такие точки с координатами $(x;a)$, что $h_a(x)=1$.

4) Найдите наибольшее x_0, для которого существует такое $x_1\neq x_0$, что $k(x_1)=k(x_0)$.

2. Домашнее задание. Доделать самостоятельную работу.

Уроки №3-4 03.09.10

Решение задач на изученные ранее темы.

---

1. Разбор самостоятельной работы.

2. Решение задач.

1) Докажите, что для всех $x\neq\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$, выполняется неравенство

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}x)\leqslant\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}x).$$

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}x)-\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}x)$ и попробуем построить ее график. Найдем производную:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)-\left(-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2x}=0$$

Таким образом, на каждом интервале непрерывности график функции представляет из себя кусочек прямой, параллельный оси абсцисс. Так как функция периодическая (и $\operatorname{tg}x$, и $\operatorname{ctg}x$ переодические с периодом π), достаточно найти значения функции в двух точках на соседних промежутках непрерывности: $f(\frac{\pi}{4})=0$, $f(\frac{3\pi}{4})=-\pi$. Таким образом, $f(x)$ на своей области определения либо равна нулю, либо равна $-\pi$, а значит, требуемое неравенство выполняется.

2) Вспомним, что $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1_{-0}$, а $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1_{+0}$. Оказывается, на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ верно следующее неравенство:

$$\sin x\cdot\operatorname{tg}x>x^2.$$

Решение:

Рассмотрим $f(x)=\sin x\cdot\operatorname{tg}x-x^2$. Найдем производную: $f'(x)=\sin x+\frac{\sin x}{\cos^2x}-2x$.

I способ: Найдем производную от $f'(x)$:

$$f''(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x} + \frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x} - 2 > 0$$

на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, поскольку $\cos x + \frac{1}{\cos x} > 2$, а $\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}$, а $f''(0) = 0$. Таким образом, на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $f'(x)$ возрастает, причем $f'(0) = 0$, значит, $f'(x) > 0$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Но, раз $f'(x) > 0$ на интервале, и равна нулю в точке 0, то $f(x)$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает, причем $f(0) = 0$, значит, $f(x) > 0$! II способ: Преобразуем первую производную:

$$f'(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2x = \operatorname{tg} x \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) - 2x.$$

Поскольку $\operatorname{tg} x > x$, а сумма взаимообратных не меньше двух, $f'(x) > 0$. Дальше рассуждения аналогичны.

3) (была только в одной группе) Сравните $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p$ и $\frac{a^p+b^p}{2}$ при положительных a и b.

Решение: Пусть $f(x) = x^p$, тогда $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. Тогда при $p \in (0; 1)$ график $f(x)$ выпуклый вверх, при $p \in \mathbb{R} \setminus [0; 1]$ — выпуклый вниз, при $p \in \{0; 1\}$ — график представляет собой прямую. Поэтому при $p \in (0; 1)$ точка $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ лежит выше точки $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, при $p \in \mathbb{R} \setminus [0; 1]$ точка $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ лежит ниже точки $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, а при $p \in \{0; 1\}$ эти точки совпадают. Отсюда можно получить знаки в неравенстве.

3. Домашнее задание.

1) Повторите формулы производных, свойства степени и логарифма, тригонометрические формулы. Формулы нужно принести с собой или помнить наизусть.

2) Вспомните, что такое неравенство Йенсена. Вспомните формулу координат точки, делящей отрезок в заданном отношении, если известны координаты концов отрезка.

3) Докажите, что при $x > 1$

$$\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x < \frac{x-1}{x}.$$

4) Докажите, что для всех $b > 0$

$$\left(\frac{1+3b}{6}\right)^{-3} \leqslant \frac{27b^3+1}{2b^3}.$$

Подсказка: сведите неравенство к виду неравенства из задачи 3 классной работы.

5) * Докажите, что для всех $m > 0$

$$\sqrt[4]{m+3} \geqslant \frac{3+\sqrt[4]{m}}{2\sqrt{2}}.$$

6) Определите множество значений функции $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ на отрезке $[-2; \frac{1}{2}]$.

7) Представьте число 8 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма квадрата первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.

8) В данную сферу радиуса R вписан конус. Найдите границы изменения площади его осевого сечения.