Гимназия 1543, 10-В класс, 2 октября.

Подстановки и самосовмещения.

Подстановкой на множестве M называется биекция $M \to M$. Мы будем обычно рассматривать подстановки на конечных множествах. Для удобства в качестве конечного множества мощности n мы будем рассматривать диапазон $\overline{1,n}$. Подстановку f мы будем обозначать символом $[f(1), f(2), \dots f(n)]$. В силу биективности, для любой подстановки существует единственная *обратная* подстановка, дающая в композиции с ней тождественную подстановку.

Траспозицией называется подстановка, которая меняет местами некоторую пару разных чисел i и j (обозначение τ_{ij}). То есть, $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$, остальные числа переходят в себя.

Циклом называется подстановка, переставляющая некоторые числа циклически (обозначение $(i_0, i_1, i_2, \dots i_{m-1})$). При применении цикла число i_k переходит в $i_{(k+1 \bmod m)}$, остальные числа остаются на месте.

Инверсией подстановки f называется пара чисел $i < j$ таких, что $f(i) > f(j)$.

Чётностью подстановки называется чётность числа инверсий этой подстановки. Чётных подстановок на неодноэлементном множестве столько же, сколько и нечётных.

Теорема о разложении подстановки на независимые циклы. Любая нетождественная подстановка может быть представлена в виде композиции циклов, множества подвижных точек которых не пересекаются. Любые два таких представления отличаются лишь порядком циклов в композиции.

Теорема о чётности подстановки. Любая подстановка представима в виде композиции транспозиций. Чётность количества транспозиций в любом таком представлении совпадает с чётностью подстановки.

1) Найдите композицию подстановок $[2, 5, 3, 1, 4]$ и $[4, 2, 1, 5, 3]$. Изменится ли результат, если поменять подстановки местами?

2) Найдите подстановку, обратную $[2, 5, 3, 1, 6, 4]$. Разложите обе эти подстановки на независимые циклы.

В последующих задачах речь будет идти о *самосовмещениях* геометрических фигур (многоугольников и многогранников). Под самосовмещением геометрической фигуры мы понимаем движение, переводящее эту фигуру в себя. Заметим, что любое такое движение переводит вершины в вершины (более того, однозначно определяется образами вершин), задавая таким образом подстановку на множестве вершин. Поэтому каждому самосовмещению соответствует некоторая подстановка.

3) Опишите (назовите движение) и запишите в виде подстановки все самосовмещения:
а) правильного треугольника; б) квадрата; в) свастики; г) правильного пятиугольника.

4) Рассмотрим правильный шестиугольник 123456. Обозначим через a осевую симметрию [165432], а через b — осевую симметрию [543216]. Все ли самосовмещения шестиугольника можно получить, применяя в некоторой последовательности только эти два преобразования?

5) Сколько самосовмещений у: а) правильного n-угольника? б) правильного тетраэдра?

Гимназия 1543, 10-В класс, 2 октября.

Подстановки и самосовмещения.

Подстановкой на множестве M называется биекция $M \to M$. Мы будем обычно рассматривать подстановки на конечных множествах. Для удобства в качестве конечного множества мощности n мы будем рассматривать диапазон $\overline{1,n}$. Подстановку f мы будем обозначать символом $[f(1), f(2), \dots f(n)]$. В силу биективности, для любой подстановки существует единственная *обратная* подстановка, дающая в композиции с ней тождественную подстановку.

Траспозицией называется подстановка, которая меняет местами некоторую пару разных чисел i и j (обозначение τ_{ij}). То есть, $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$, остальные числа переходят в себя.

Циклом называется подстановка, переставляющая некоторые числа циклически (обозначение $(i_0, i_1, i_2, \dots i_{m-1})$). При применении цикла число i_k переходит в $i_{(k+1 \bmod m)}$, остальные числа остаются на месте.

Инверсией подстановки f называется пара чисел $i < j$ таких, что $f(i) > f(j)$.

Чётностью подстановки называется чётность числа инверсий этой подстановки. Чётных подстановок на неодноэлементном множестве столько же, сколько и нечётных.

Теорема о разложении подстановки на независимые циклы. Любая нетождественная подстановка может быть представлена в виде композиции циклов, множества подвижных точек которых не пересекаются. Любые два таких представления отличаются лишь порядком циклов в композиции.

Теорема о чётности подстановки. Любая подстановка представима в виде композиции транспозиций. Чётность количества транспозиций в любом таком представлении совпадает с чётностью подстановки.

1) Найдите композицию подстановок $[2, 5, 3, 1, 4]$ и $[4, 2, 1, 5, 3]$. Изменится ли результат, если поменять подстановки местами?

2) Найдите подстановку, обратную $[2, 5, 3, 1, 6, 4]$. Разложите обе эти подстановки на независимые циклы.

В последующих задачах речь будет идти о *самосовмещениях* геометрических фигур (многоугольников и многогранников). Под самосовмещением геометрической фигуры мы понимаем движение, переводящее эту фигуру в себя. Заметим, что любое такое движение переводит вершины в вершины (более того, однозначно определяется образами вершин), задавая таким образом подстановку на множестве вершин. Поэтому каждому самосовмещению соответствует некоторая подстановка.

3) Опишите (назовите движение) и запишите в виде подстановки все самосовмещения:
а) правильного треугольника; б) квадрата; в) свастики; г) правильного пятиугольника.

4) Рассмотрим правильный шестиугольник 123456. Обозначим через a осевую симметрию [165432], а через b — осевую симметрию [543216]. Все ли самосовмещения шестиугольника можно получить, применяя в некоторой последовательности только эти два преобразования?

5) Сколько самосовмещений у: а) правильного n-угольника? б) правильного тетраэдра?