Волшебные свойства эллипса и гиперболы

22.11.10

Для начала сделаем процедуру, похожую на то, что мы делали с параболой. Рассмотрим две точки: A и B, расстояние между которыми — целое число. Проведены все окружности целочисленных радиусов с центрами в A и B. На полученной сетке отмечаем такую последовательность узлов: рисунок. Заметим, что полученное множество точек образует эллипс. Почему так получается? Потому что сумма расстояний до точек A и B одинакова.

Теперь рассмотрим другие точки. Какую кривую образуют они? Гиперболу, так как модуль разности расстояний до точек A и B не изменяется.

Оптическое свойство

Давайте вспомним оптическое свойство параболы: лучи, параллельные оси параболы при отражении приходят в её фокус. Эллипс, гипербола и парабола в некотором смысле очень похожи, (а почему — я расскажу позже) так что у эллипса и даже у гиперболы тоже есть свои оптические свойства. Давайте сначала разберемся с эллипсом. Для этого нам понадобится определить касательную к эллипсу. Сделаем это аналогично определению касательной к окружности: *касательная* к эллипсу — это такая прямая, которая имеет с эллипсом ровно 1 общую точку. Давайте вспомним предпоследнюю задачу из субботнего листочка: дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой l такую точку X, для которой сумма растояний $AX+XB$ до точек A и B наименьшая. Решение состоит в том, что мы отражаем точку B относительно l, получаем B', проводим прямую AB', AB' пересечет l в точке X — это и будет искомая точка, после чего луч XB' отражаем обратно и получаем пару равных углов. Давайте рассмотрим прямую k, касающуюся эллипса с фокусами F_1 и F_2 в точке P. Тогда углы между прямой k и отрезками PF_1 и PF_2 будут равны. Действительно, давайте возьмем на этой прямой точку X. Тогда для неё $XF_1+XF_2 > PF_1+PF_2$, то есть, из всех точек прямой точка P имеет наименьшую сумму расстояний до F_1 и F_2, значит, искомые углы и впрямь равны.

ДЗ: доказать аналогичное оптическое свойство для гиперболы.

Изогональное свойство

Теорема 1. Пусть F_1, F_2 — фокусы эллипса. Проведем из любой точки P, лежащей вне эллипса, две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках X и Y. Тогда углы F_1PX и F_2PY равны. Пусть F_1', F_2' — точки, симметричные F_1 и F_2 относительно PX и PY соответственно. Тогда $PF_1' = PF_1$ и $PF_2' = PF_2$. Кроме того, точки F, Y и F_2' лежат на одной прямой, в силу оптического свойства. То же самое верно и для точек F_1, X и F_1'. Получаем $F_2F_1' = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_2'F_1$. Следовательно, треугольники PF_2F_1' и PF_1F_2' равны (по трем сторонам). А значит,

$$\angle F_2PF_1 + 2\angle F_1PX = \angle F_2PF_1' = \angle F_1PF_2' = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY$$

. *ДЗ: доказать аналогичное изогональное свойство для гиперболы.*

Итак, можно обобщить полученный нами результат таким образом:

Теорема 2. В обозначениях теоремы 1 прямая F_1P является биссекрисой $\angle XF_1Y$.

Некоторые факты без доказательств

1. Кривые как огибающие прямых

Пока что способом получения многих известных нам кривых был поиск ГМТ. Теперь рассмотрим новый способ определять кривые: с помощью *огибающих* некоторого семейства прямых. Это значит, что мы будем искать такую кривую, которая касается каждой прямой из этого семейства. Рассмотрим такую задачу: даны окружность с центром O и точка A. Через каждую точку M окружности проведена прямая, перпендикулярная отрезку MA. Так вот огибающей этого семейства будет а) окружность, если $A = O$; б) эллипс, если A лежит внутри окружности; в) гипербола, если A лежит вне окружности.

2. Сечения конуса

Рассмотрим конус и его сечения различными плоскостями.

Если плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении получится окружность, так как конус — фигура вращения.

Если плоскость пересекает все образующие конуса, но не перпендикулярна его оси, то в сечении мы получим эллипс.

Если же плоскость параллельна паре образующих, то в сечении получается гипербола.

Если плоскость параллельна одной образующей, в сечении получается парабола.

Все эти кривые, которые получаются при сечении конуса плоскостью, называются *коники*.