Гимназия 1543, 10-В класс, 8 ноября.

Гомоморфизмы и факторгруппы.

1) Существуют ли нормальные и не нормальные собственные подгруппы в $\mathbb{Q}_+^*$? в $\mathbb{Z}$? в $\mathbb{Z}_n$?

2) Пусть даны группа G и некоторая её подгруппа H. Докажите, что если $|G|/|H| = 2$, то H нормальна в G.

3) Докажите, что коммутант группы является её нормальным делителем, а факторгруппа группы по её коммутанту является абелевой.

4) Пусть $G := D_4$ — группа самосовмещений квадрата, H — её подгруппа, содержащая симметрии относительно диагоналей квадрата, центральную симметрию и тождественное отображение, а K — её подгруппа, содержащая только симметрию относительно одной из диагоналей квадрата и тождественное отображение. Правда ли, что $K \lhd H \lhd G$? А что $K \lhd G$?

5) Рассмотрим группу поворотов квадрата и группу самосовмещений ромба. Сколько в каждой из них элементов? Изоморфны ли они? Изоморфна ли D_4/H хотя бы одной из них, где D_4 — группа самосовмещений квадрата, а H — её подгруппа, содержащая центральную симметрию и тождественное преобразование?

6) Докажите, что любая группа G является факторгруппой некоторой свободной группы по некому её нормальному делителю. Любой набор образующих этого делителя называется набором определяющих соотношений группы G.

7) Рассмотрим свободную группу с алфавитом $\{a\}$. Какая группа порождается определяющим соотношением a^n?

8) Докажите, что группа векторов на плоской целочисленной решётке по сложению порождается соотношением $aba^{-1}b^{-1}$ на свободной группе с алфавитом $\{a, b\}$.

Гимназия 1543, 10-В класс, 8 ноября.

Гомоморфизмы и факторгруппы.

1) Существуют ли нормальные и не нормальные собственные подгруппы в $\mathbb{Q}_+^*$? в $\mathbb{Z}$? в $\mathbb{Z}_n$?

2) Пусть даны группа G и некоторая её подгруппа H. Докажите, что если $|G|/|H| = 2$, то H нормальна в G.

3) Докажите, что коммутант группы является её нормальным делителем, а факторгруппа группы по её коммутанту является абелевой.

4) Пусть $G := D_4$ — группа самосовмещений квадрата, H — её подгруппа, содержащая симметрии относительно диагоналей квадрата, центральную симметрию и тождественное отображение, а K — её подгруппа, содержащая только симметрию относительно одной из диагоналей квадрата и тождественное отображение. Правда ли, что $K \lhd H \lhd G$? А что $K \lhd G$?

5) Рассмотрим группу поворотов квадрата и группу самосовмещений ромба. Сколько в каждой из них элементов? Изоморфны ли они? Изоморфна ли D_4/H хотя бы одной из них, где D_4 — группа самосовмещений квадрата, а H — её подгруппа, содержащая центральную симметрию и тождественное преобразование?

6) Докажите, что любая группа G является факторгруппой некоторой свободной группы по некому её нормальному делителю. Любой набор образующих этого делителя называется набором определяющих соотношений группы G.

7) Рассмотрим свободную группу с алфавитом $\{a\}$. Какая группа порождается определяющим соотношением a^n?

8) Докажите, что группа векторов на плоской целочисленной решётке по сложению порождается соотношением $aba^{-1}b^{-1}$ на свободной группе с алфавитом $\{a, b\}$.

Гимназия 1543, 10-В класс, 8 ноября.

Гомоморфизмы и факторгруппы.

1) Существуют ли нормальные и не нормальные собственные подгруппы в $\mathbb{Q}_+^*$? в $\mathbb{Z}$? в $\mathbb{Z}_n$?

2) Пусть даны группа G и некоторая её подгруппа H. Докажите, что если $|G|/|H| = 2$, то H нормальна в G.

3) Докажите, что коммутант группы является её нормальным делителем, а факторгруппа группы по её коммутанту является абелевой.

4) Пусть $G := D_4$ — группа самосовмещений квадрата, H — её подгруппа, содержащая симметрии относительно диагоналей квадрата, центральную симметрию и тождественное отображение, а K — её подгруппа, содержащая только симметрию относительно одной из диагоналей квадрата и тождественное отображение. Правда ли, что $K \lhd H \lhd G$? А что $K \lhd G$?

5) Рассмотрим группу поворотов квадрата и группу самосовмещений ромба. Сколько в каждой из них элементов? Изоморфны ли они? Изоморфна ли D_4/H хотя бы одной из них, где D_4 — группа самосовмещений квадрата, а H — её подгруппа, содержащая центральную симметрию и тождественное преобразование?

6) Докажите, что любая группа G является факторгруппой некоторой свободной группы по некому её нормальному делителю. Любой набор образующих этого делителя называется набором определяющих соотношений группы G.

7) Рассмотрим свободную группу с алфавитом $\{a\}$. Какая группа порождается определяющим соотношением a^n?

8) Докажите, что группа векторов на плоской целочисленной решётке по сложению порождается соотношением $aba^{-1}b^{-1}$ на свободной группе с алфавитом $\{a, b\}$.