Логарифм. Упражнения.

Итак, мы разобрали разные подходы к понятию логарифма. Мы знаем, что $\ln a$ *при* $a > 1$ *можно понимать как площадь под гиперболой* $y = \frac{1}{x}$ *между прямыми* $x = 1$ *и* $x = a$. *При этом логарифм устроен таким образом, что* $e^{\ln a} = a$. *Из этого, а также непосредственно из свойств площади следует, что* $\ln ab = \ln a + \ln b$. *С помощью таблицы логарифмов, то есть списка логарифмов всех чисел (с некоторым шагом) можно заменить умножение сложением: желая умножить* a *на* b, *мы находим в таблице их логарифмы, складываем их и находим число, логарифмом которого является наша сумма. Это и будет ответ. В XVII – XVIII веках были составлены очень подробные таблицы логарифмов. На основе таблиц логарифмов в 1622 году англичанин Вильям Отред (William Oughtred) изготовил подвижное устройство, получившее название* ***логарифмической линейки****. К XIX веку линейки были существенно усовершенствованы, на них можно было считать корни, тригонометрические функции и так далее. Советские школьники учились на уроках математики пользоваться логарифмической линейкой примерно до 80-х годов прошлого века, пока её не вытеснили первые советские калькуляторы "Электроника МК".*

1) Пока мы определили площадь (и логарифм) только при $a > 1$. Логично предположить, что $\ln 1 = 0$ (почему?). Как определить $\ln a$ при $0 < a < 1$, чтобы выполнялось основное свойство логарифма?

2) Докажите, что группы $\mathbb{R}^*_+$ и $\mathbb{R}$ изоморфны.

3) Докажите свойства логарифма: $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ (объясните алгебраически и с помощью площадей), $\ln(a^x) = x \ln a$ (здесь x — любое вещественное число, а a^x понимается как $e^{x \ln a}$).

4) Рассмотрим площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$. Как нужно выбрать $a < c < b$, чтобы прямая $x = c$ разделила эту площадь пополам?

5) Разбивая площадь под гиперболой на части равной ширины, докажите, что для любого натурального n:

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} < \ln 2$;

б) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \ln 2$.

6) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

Предыдущая задача показывает, что $\ln 2 \approx \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$ *при больших* n. *С другой стороны,* $\ln 2 = \ln \frac{2n}{n} = \ln 2n - \ln n$. *Это может навести на мысль, что* $\ln n \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$. *В каком-то смысле так оно и есть.*

7) Докажите, что:

а) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > \ln n$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n$.

8) Положим $\gamma_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$. Докажите, что последовательность γ_n возрастает и ограничена сверху (единицей).

Мы доказали тем самым, что существует предел $\gamma_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$. *Этот предел называется числом Эйлера-Маскерони. Число это обозначается* C, *оно, как мы доказали, не превосходит единицы, а на самом деле приблизительно равно половине, точнее* $C \approx 0,577$. *То есть, гармонический ряд растёт примерно как логарифм,* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \approx C + \ln n$. Большинство математиков не сомневается, что C — иррациональное число, однако пока доказать это никому не удалось.