Как придумать логарифм

Логарифмы были придуманы в начале 1600-х годов в Шотландии Джоном Непером (John Naiper, 1550–1617). Он был из старинного воинственного шотландского рода, но прославился не этим. Непер изучал логику, теологию, право, физику, математику, этику; увлекался алхимией и астрологией. Изобрел несколько полезных сельскохозяйственных орудий. В связи с астрологией он составлял таблицы движение планет. Для этого ему нужно было в больших количествах вычислять синусы и косинусы сумм углов: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. У Непера были таблицы всех тригонометрических функций, и он нашёл способ сэкономить на умножении. Благодаря этому Непер и известен нам. А изобрёл он таблицу логарифмов.

1. Пусть есть готовая таблица целых степеней числа $(1-10^{-7})$:
   $1, (1-10^{-7})^1, (1-10^{-7})^2, \ldots, (1-10^{-7})^{y-1}, (1-10^{-7})^y$
   • Пусть заранее вычислены подряд все такие числа от 1 до достаточно большого y. Достаточно большого — чтобы получившееся число $(1-10^{-7})^y$ было маленьким. Придумайте, как с помощью такой таблицы чисел можно приближённо сосчитать произведение каких-нибудь двух чисел от 0 до 1, скажем, 0.234567×0.76543, не тратя силы на их умножение их в столбик?

2. Рассмотрим число, чуть большее единицы: $(1+10^{-4})$. Будем возводить его в целые степени y и смотреть, какие числа получаются: $x_y = (1+10^{-4})^y$.
   • Выразите разности соседних чисел x_{y+1} и x_y через x_y:
   $\Delta_1 = x_1 - x_0 = (1+10^{-4})^1 - 1 = ?$
   $\Delta_2 = x_2 - x_1 = (1+10^{-4})^2 - (1+10^{-4})^1 = ?$
   $\Delta_3 = x_3 - x_2 = (1+10^{-4})^3 - (1+10^{-4})^2 = ? \ldots$
   $\Delta_{y+1} = x_{y+1} - x_y = (1+10^{-4})^{y+1} - (1+10^{-4})^y = ?$
   • Предложите простой способ сосчитать всю таблицу чисел: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{y}}$, используя наименьшее число арифметических операций.

3. В получившейся таблице есть не очень красивый момент: небольшим x соответствуют гигантские y. Попробуем поправить. Сделаем замену: $\tilde{y} = 10^{-4}y$.
   Тогда для соседних чисел y и $y+1$, соответсвующие им $\tilde{y}$ отличаются на 10^{-4}.
   • Напишите, как связаны x и $\tilde{y}$. Что это напоминает?
   • Покажите, что $\tilde{y} = \frac{(x_1-x_0)}{x_0} + \frac{(x_2-x_1)}{x_1} + \frac{(x_3-x_2)}{x_2} + \frac{(x_4-x_3)}{x_3} + \cdots + \frac{(x_y-x_{y-1})}{x_y}$.
   • Изобразите эту сумму как сумму площадей прямоугольников, левые края которых лежат на гиперболе $\tilde{y} = 1/x$.
   Насколько отличаются высоты соседних прямоуголников?
   Насколько отличаются их ширины?

4. Теория: Переход к пределу $10^{-4} \to 0$. Будем рассматривать всё более близкие к 1 числа $(1+10^{-n})$. Разбиение на прямоугольник, построенные на гиперболе $\tilde{y} = 1/x$ станет всё более и более мелким. Их суммарная площадь будет всё ближе и ближе к площади под участком гиперболы от 1 до x.
   Итак, мы доказали, что если $e^y = x$, то y равно площади под участком гиперболы от 1 до x: $\mathrm{S}(1, x)$

5. Свойства площади под гиперболой.
   • **Аддитивность площади** (addition – сложение): $\mathrm{S}(a, b) + \mathrm{S}(b, c) = \mathrm{S}(a, c)$
   • **Неизменность площади при растяжении по x со сжатием по $\tilde{y}$**:
   $\mathrm{S}(x_1, x_2) = \mathrm{S}(a\cdot x_1, a\cdot x_2)$
   Изобразите графически оба участка: (x_1, x_2) и $(a\cdot x_1, a\cdot x_2)$
   • **Логарифм произведения равен сумме логарифмов**: $\mathrm{S}(1, x\cdot y) = \mathrm{S}(1, x) + \mathrm{S}(1, y)$

6. Повторите достижение Непера: как с помощью таблицы логарифмов синусов и логарифмов косинусов найти синус суммы двух углов? Спланируйте вычисления.